



FO 7 | Outils

Équations différentielles



I Équations d'ordre 1 (partie 1/3)

À utiliser après le cours sur les systèmes du premier ordre

Objectifs. Je sais reconnaître une équation linéaire à coefficients constants, la mettre sous forme canonique, *expliquer* pourquoi la solution contient une exponentielle, résoudre avec une condition initiale, et *contrôler* mon résultat.

Mode d'emploi. Les exercices (en fin de partie) sont classés par difficultés croissantes : 1 à 3. Passer au niveau supérieur seulement après avoir réussi le précédent *sans* regarder la fiche.

Cette partie sera complétée par la partie 2/3 (ordre 2), puis par une synthèse partie 3/3.

I.A Reconnaître et mettre en forme

Savoir

Équation linéaire à coefficients constants

L'inconnue $u(t)$ et ses dérivées apparaissent à la puissance 1, multipliées par des constantes. Le second membre ne dépend que de t .

- **Oui** : $RC \frac{du}{dt} + u = E$; $3 \frac{du}{dt} + 6u = 12$.
- **Non** : $\frac{du}{dt} + u^2 = 0$ (non linéaire); $\frac{du}{dt} + t u = 0$ (coefficient variable).

Dans les cas « Non », cette fiche *ne s'applique pas* : on suit l'énoncé (séparation des variables, par exemple).

Savoir

Forme canonique d'ordre 1 (second membre constant)

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{u_{\infty}}{\tau}$$

- coefficient **1** devant $\frac{du}{dt}$;
- τ : **constante de temps** (en s);
- u_{∞} : **valeur finale**, de même dimension que u , à identifier dans le second membre.

Contrôle immédiat : tous les termes ont la même dimension. Si $\frac{du}{dt}$ et $\frac{u}{\tau}$ sont homogènes, alors τ est bien un temps.

S'entraîner : exercices [I.E](#) et [I.E](#).



I.B Pourquoi une exponentielle ?

Document

Une fonction proportionnelle à sa dérivée

L'équation homogène $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$ s'écrit $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau} u$: la dérivée de u est *proportionnelle* à u . La fonction qui a cette propriété est l'exponentielle :

$$u(t) = K e^{rt} \implies \frac{du}{dt} = r u.$$

En reportant dans l'équation homogène, la dérivation devient une multiplication par r :

$$r K e^{rt} + \frac{1}{\tau} K e^{rt} = 0 \implies r + \frac{1}{\tau} = 0 \implies r = -\frac{1}{\tau}.$$

L'équation différentielle est devenue une **équation algébrique** en r : c'est l'*équation caractéristique*.

Document

Pourquoi « solution homogène + solution particulière » ?

L'équation est linéaire : si u_p vérifie l'équation complète et u_H l'équation homogène, alors $u_H + u_p$ vérifie l'équation complète.

Physiquement :

- u_p décrit le **régime permanent**, imposé par le second membre : ici $u_p = u_\infty$;
- u_H décrit le **régime transitoire**, qui « raccorde » l'état initial au régime permanent et s'éteint.

I.C Méthode de résolution

Méthode

Méthode — les 5 étapes

1. **Forme canonique** : diviser pour avoir le coefficient 1 devant $\frac{du}{dt}$; identifier τ et u_∞ .
2. **Solution homogène** : $r = -\frac{1}{\tau}$, donc $u_H(t) = A e^{-t/\tau}$ (A constante, inconnue pour l'instant).
3. **Solution particulière** : second membre constant, on cherche u_p constante ; sa dérivée est nulle, d'où $u_p = u_\infty$.
4. **Solution complète** : $u(t) = A e^{-t/\tau} + u_\infty$.
5. **Constante** : avec la condition initiale, appliquée à la *solution complète*.

Puis contrôler : valeur en $t = 0$, limite en $t \rightarrow \infty$ (égale à u_∞), homogénéité, allure cohérente avec la physique.



Savoir-faire

Résultat général

Avec $u(0) = u_0$:

$$u(t) = u_{\infty} + (u_0 - u_{\infty}) e^{-t/\tau}$$

Lecture : valeur finale + (écart initial à la valeur finale) $\times$ décroissance exponentielle. Retrouver cette formule par la méthode plutôt que l'apprendre seule.

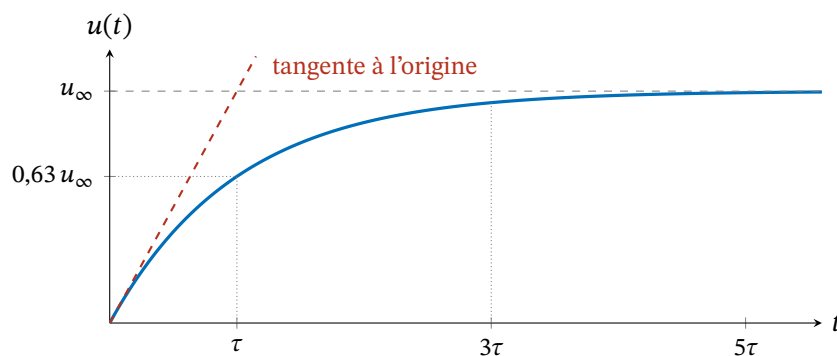
Exercice d'application 1

Exemple résolu — charge d'un condensateur

Énoncé. $RC \frac{du}{dt} + u = E$, avec $u(0) = 0$. Déterminer $u(t)$.

S'entraîner : exercices I.E à I.E.

I.D Lire et interpréter τ



Réponse $u(t) = u_{\infty} (1 - e^{-t/\tau})$ pour $u(0) = 0$.

Savoir

Signification de τ

- La tangente à l'origine coupe l'asymptote $u = u_{\infty}$ en $t = \tau$.
- À $t = \tau$, 63 % de l'écart initial est parcouru (il en reste 37 %).
- À $t \approx 3\tau$: 95 % ; à $t \approx 5\tau$: 99 %. Le régime permanent est atteint.

Ces repères valent quel que soit u_0 : on raisonne sur l'écart $u_0 - u_{\infty}$.

Savoir

Stabilité : le signe compte

Si l'équation s'écrit $\frac{du}{dt} - \frac{u}{\tau} = \dots$ (signe $-$), la solution homogène est $A e^{+t/\tau}$: elle *diverge*. Le système est instable : la valeur constante qui vérifie l'équation n'est *jamais atteinte*, ce n'est pas une « valeur finale ».



Vérifier le signe *avant* d'appliquer la méthode.

Méthode

Erreurs fréquentes à l'ordre 1

E1. Constante calculée sur u_H seule. La condition initiale porte sur la grandeur physique $u = u_H + u_\infty$.

Écrire $u_H(0) = u_0$ est faux dès que $u_\infty \neq 0$.

E2. Lire τ avant la forme canonique. Dans $3\frac{du}{dt} + 6u = 12$, on a $\frac{du}{dt} + 2u = 4$, donc $\tau = 0,5 \text{ s}$ (et non $\frac{1}{6}$), et $u_\infty = 2$ (et non 12).

E3. Appliquer la méthode sans terme en u . Pour $\frac{du}{dt} = 5$, il n'y a ni τ ni u_∞ : on intègre directement, $u = 5t + u_0$.

S'entraîner : exercices [I.E](#) et [I.E.](#)

I.E Exercices — ordre 1

Reconnaître et mettre en forme

Exercice d'application 2

§ 1.1 ● ○ ○

Pour chaque équation, dire si elle est linéaire à coefficients constants. Justifier en une phrase.

1. $\frac{dy}{dt} + 3y = \sin t$

3. $\frac{dy}{dt} + ty = 0$

5. $y \frac{dy}{dt} = 1$

2. $\frac{dy}{dt} + y^2 = 0$

4. $2\frac{dy}{dt} = -4y + 8$

6. $\frac{dy}{dt} = 5$

Exercice d'application 3

§ 1.1 ● ○ ○

Mettre sous la forme $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}$, puis exprimer τ et la valeur finale.

1. $RC\frac{du}{dt} + u = E$

(tension aux bornes du condensateur, circuit RC)

2. $L\frac{di}{dt} + Ri = E$

(courant dans un circuit RL)

3. $3\frac{du}{dt} + 6u = 12$

(grandeurs en unités SI)

4. $C\frac{dT}{dt} = \frac{T_{\text{ext}} - T}{R_{\text{th}}}$

(température d'un corps de capacité thermique C)



Résoudre

Exercice d'application 4

§ 1.3 ● ● ○

On reprend l'exemple résolu : $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$.

1. Exprimer l'instant t_{95} où u atteint 95 % de sa valeur finale.
2. Application numérique : $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$.

Exercice d'application 5

§ 1.3 ● ● ○

On a $L \frac{di}{dt} + Ri = E$ avec $i(0) = I_0 \neq 0$. Déterminer $i(t)$, puis vérifier le résultat par trois contrôles (valeur initiale, valeur finale, homogénéité).

Exercice d'application 6

§ 1.3 ● ● ○

La température d'un thé vérifie $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{\text{ext}}}{\tau}$ avec $\tau = 10 \text{ min}$ et $T_{\text{ext}} = 20^\circ\text{C}$. Le thé est servi à $T_0 = 80^\circ\text{C}$.

1. Identifier la valeur finale, puis déterminer $T(t)$.
2. Au bout de combien de temps le thé est-il à 40°C ?

Analyser

Exercice d'application 7

§ 1.4 ● ● ●

Un élève résout $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec $u(0) = 0$. Il écrit :

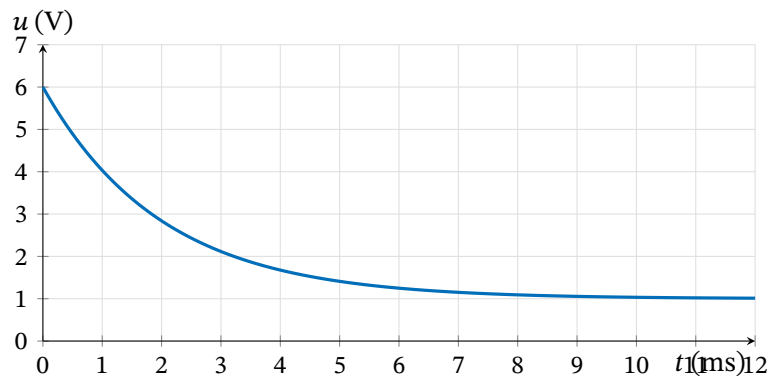
« $u_H = A e^{-t/\tau}$. Or $u(0) = 0$ donc $u_H(0) = 0$, d'où $A = 0$.
Comme $u_p = E$, on obtient $u(t) = E$ pour tout t . »

1. Sans refaire le calcul, montrer par un argument *physique* (tension aux bornes d'un condensateur) que ce résultat est impossible.
2. Identifier l'erreur de méthode et la corriger.

Exercice d'application 8

§ 1.4 ● ● ●

L'oscilloscope enregistre la tension $u(t)$ ci-dessous.



1. Lire la valeur initiale u_0 et la valeur finale u_∞ .
2. Déterminer τ par deux méthodes différentes, en expliquant chacune.
3. En déduire l'équation différentielle sous forme canonique et l'expression de $u(t)$.

Auto-évaluation — ordre 1

Je coche quand je sais le faire *sans* la fiche :

- | | |
|--|---|
| ☐ forme canonique, τ et u_∞ | ☐ constante sur la solution complète |
| ☐ expliquer l'exponentielle | ☐ lire τ sur un graphe |
| | ☐ contrôles finaux |