



FO 3 | Outils

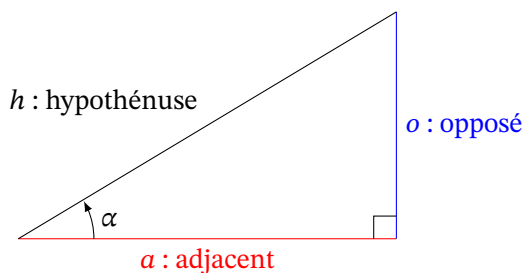
Trigonométrie



Introduction

La trigonométrie concerne l'étude des triangles (étude de la taille des triangles) et donc en particulier des fonctions sin, cos et tan.

Les fonctions sinus, cosinus et tangente



Théorème de Pythagore :

Savoir

$$h^2 = a^2 + o^2$$

Relations entre un angle et deux longueurs :

Savoir

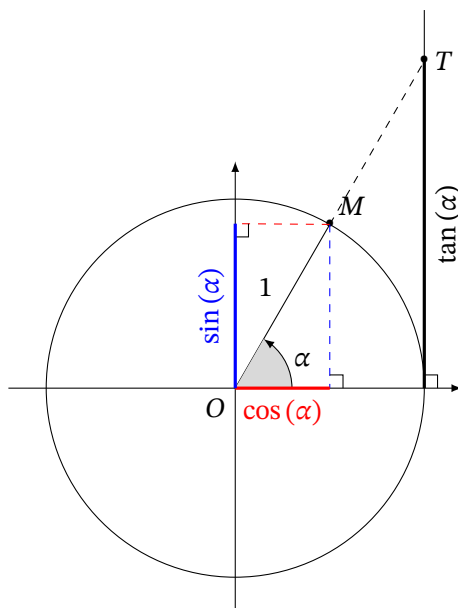
$$\sin \alpha = \frac{o}{h} \quad \cos \alpha = \frac{a}{h} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{o}{a}$$

Exercice d'application 1

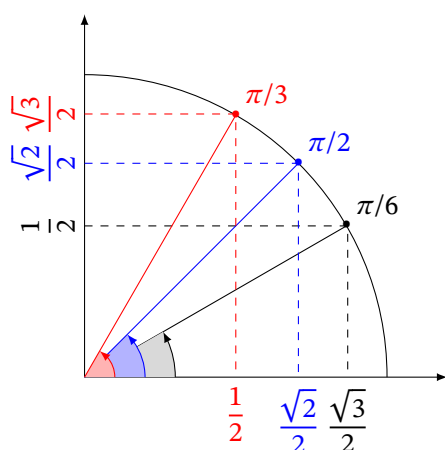
1 À partir des relations précédentes, montrer que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Le cercle trigonométrique

C'est l'outil 'magique' qui permet comprendre et retenir la plupart des formules de trigonométrie.



Valeurs remarquables



α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0

Exercice d'application 2

- 1 Déterminer les valeurs remarquables de tan pour les angles suivants : $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi$ et 2π .

Périodicités

Savoir

$$\forall p \in \mathbb{Z},$$

$$\cos(\alpha + 2\pi \times p) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + 2\pi \times p) = \sin(\alpha)$$

Parité

Savoir

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \text{fonction paire}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{fonction impaire}$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \text{fonction impaire}$$



Exercice d'application 3

1 Déterminer les valeurs exactes suivantes :

1. $\cos(3\pi/4)$

5. $\cos(17\pi/2)$

2. $\sin(-\pi/4)$

6. $\sin(5\pi/3)$

3. $\cos(5\pi/6)$

7. $\tan(3\pi/4)$

4. $\sin(-2\pi/6)$

8. $\sin(17\pi/3)$

Rotation de π

Toutes ces transformations se retrouvent en traçant un cercle trigonométrique :

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$$

$$\cos(\alpha - \pi) = -\cos(\alpha)$$

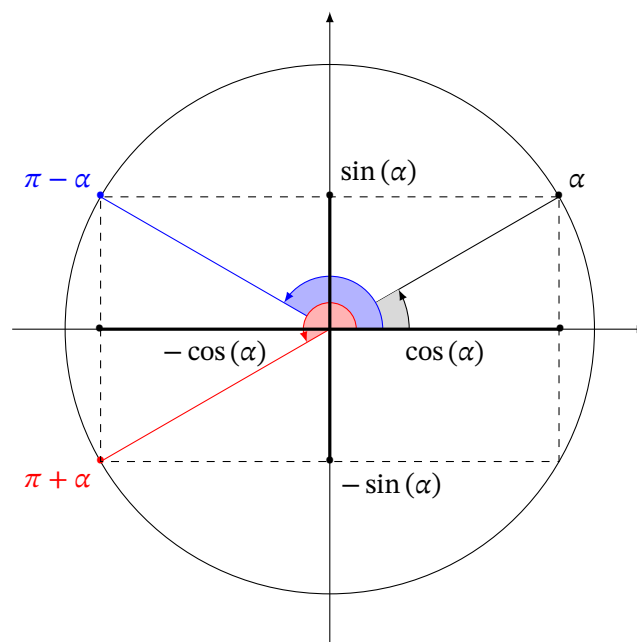
$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(\alpha - \pi) = \tan(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$



Rotation de $\pi/2$

Exercice d'application 4



En vous aidant du cercle trigonométrique, retrouver les formules suivantes :

$$\cos(\alpha + \pi/2) =$$

$$\sin(\alpha + \pi/2) =$$

$$\cos(\alpha - \pi/2) =$$

$$\sin(\alpha - \pi/2) =$$

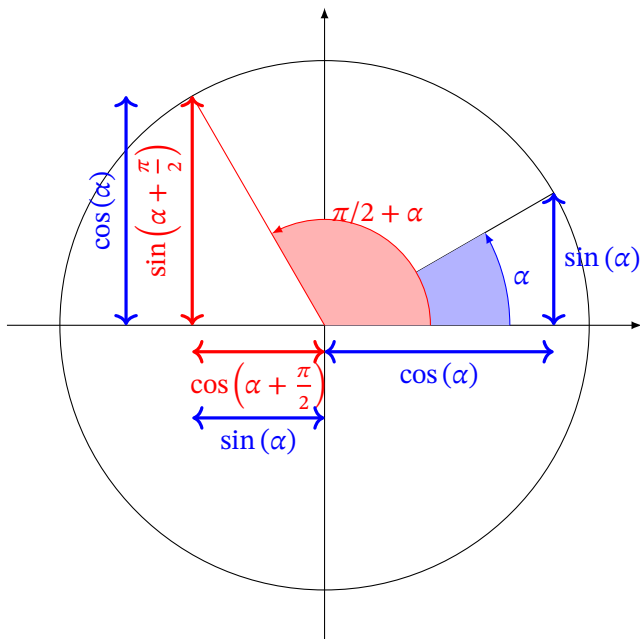
$$\cos(\pi/2 - \alpha) =$$

$$\sin(\pi/2 - \alpha) =$$

Méthode :

- tracer l'angle α et l'angle transformé sur le cercle trigonométrique;
- tracer les projections sur les axes des deux angles;
- déterminer le signe de la projection recherchée;
- déterminer la longueur.

Exemple pour $\alpha \rightarrow \alpha + \pi/2$:



1. voir la figure de gauche;
2. voir la figure de gauche;
3. la projection sur l'axe des abscisses est négative, donc $\cos(\pi/2 + \alpha) = \ominus \dots$ et la projection sur l'axe des ordonnées est positive, donc $\sin(\pi/2 + \alpha) = \oplus \dots$;
4. la longueur vaut sur l'axe des abscisses est $\sin(\alpha)$, donc $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$ et la longueur sur l'axe des ordonnées est $\cos \alpha$ donc $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos(\alpha)$.

Pour la tangente, il faut repasser par la définition $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ pour montrer que :

$$\tan(\pi/2 + \alpha) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

$$\tan(\pi/2 - \alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Additions et soustractions d'angle

Ces formules sont à connaître par cœur car elles sont à la base de toutes les autres formules.



Savoir

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Les formules pour la tangente se démontrent¹ à partir des sinus et cosinus.

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Remarque : toutes les formules d'addition et soustraction permettent de retrouver les valeurs remarquables de rotation pour π ou $\pi/2$.

Exemple :

$$\cos(14\pi/3) = \cos\left(\frac{12\pi + 2\pi}{3}\right)$$

$$\cos(14\pi/3) = \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos(14\pi/3) = \cos(4\pi)\cos(2\pi/3) - \sin(4\pi)\sin(2\pi/3)$$

$$\cos(14\pi/3) = 1 \times -\frac{1}{2} - 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(14\pi/3) = -\frac{1}{2}$$

Formules de duplication

Ces formules sont à connaître par cœur ou à savoir retrouver rapidement.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$= 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$= \frac{2\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$$

Exercice d'application 5

- 1 Démontrer les 3 formules pour le cosinus et la formule pour le sinus à l'aide des formules d'addition et soustraction d'angle.

1. voir les annexes

2. Formule rarement utile. Voir la démonstration en annexe $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)}$



Ces formules sont souvent utiles pour linéariser un $\sin^2$ ou un $\cos^2$:

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2} \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \\ \cos(\alpha) \sin(\alpha) &= \frac{\sin(2\alpha)}{2}\end{aligned}$$

Formules de linéarisation

Ces formules sont à connaître par cœur ou à savoir retrouver rapidement. Les formules de linéarisation permettent de transformer un produit de fonction trigonométrique en somme de fonction trigonométrique.

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

Exercice d'application 6

- 1 Démontrer les 2 formules précédentes à l'aide des formules d'addition et soustraction d'angle.

Formules de factorisation

Ces formules sont à connaître par cœur ou à savoir retrouver rapidement. Les formules de factorisation permettent de transformer une somme de fonction trigonométrique en produit de fonction trigonométrique (contrairement à la linéarisation).

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos(p) - \cos(q) &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2} \\ &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

Exercice d'application 7

- 1 Démontrer la première formule pour le cosinus et la première formule pour le sinus.



Annexes

Démonstration $\tan(\pi/2 \pm \alpha) = \mp \frac{1}{\tan(\alpha)}$

$$\begin{aligned}\tan(\pi/2 \pm \alpha) &= \frac{\sin(\pi/2 \pm \alpha)}{\cos(\pi/2 \pm \alpha)} \\ &= \frac{\cos(\alpha)}{\mp \sin(\alpha)} \\ &= \mp \frac{1}{\tan \alpha}\end{aligned}$$

Démonstration $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \tan(b)}$

$$\begin{aligned}\tan(a \pm b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} \\ &= \frac{\sin(a) \cos(b) \pm \sin(b) \cos(a)}{\cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)} \\ &= \frac{\frac{\sin(a) \cos(b)}{\cos(a) \cos(b)} \pm \frac{\sin(b) \cos(a)}{\cos(a) \cos(b)}}{1 \mp \frac{\sin(a) \sin(b)}{\cos(a) \cos(b)}} \\ &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \tan(b)}\end{aligned}$$

Démonstration $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)}$

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= 1 - \sin^2(\alpha) \\ &= 1 - \tan^2(\alpha) \cos^2(\alpha) \\ \cos^2(\alpha) (1 + \tan^2(\alpha)) &= 1 \\ \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

