



DS 2 | Optique - Électrocinétique - Chimie

Physique-Chimie



Consignes

Rédiger sur copie, encadrer les résultats, faire figurer les unités à chaque étape. Toute réponse non justifiée est considérée comme nulle. Les annexes sont à rendre avec la copie.

Durée

4 h 00

Calculatrice autorisée

Non

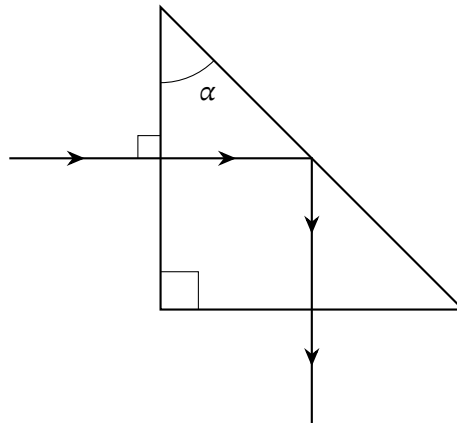


Exercice 1 : Prisme à réflexion

1.1 Condition de réflexion totale

On souhaite que le trajet des rayons lumineux dans un prisme, d'angle au sommet α , soit celui reproduit sur la figure ci-dessous. Le prisme, d'indice n , est placé dans l'air d'indice $n_a < n$.

Pour les calculs, nous prendrons $n_a = 1$.



- 1 Expliquer pourquoi le rayon n'est pas dévié à l'entrée du prisme.

Correction

Le rayon arrive sous incidence normale ($i_1 = 0$) sur la face d'entrée. D'après la loi de Snell-Descartes, $n_a \sin 0 = n \sin r_1$ donc $r_1 = 0$: le rayon n'est pas dévié.

- 2 Montrer que l'angle d'incidence que fait le rayon sur l'hypoténuse vaut α .

Correction

On considère le triangle formé par le sommet du prisme, le point d'entrée et le point d'incidence sur l'hypoténuse. Ses angles valent α (sommet), $\pi/2$ (le rayon est perpendiculaire à la face d'entrée) et $\pi/2 - i$ (angle entre le rayon et l'hypoténuse, i étant mesuré par rapport à la normale). La somme des angles d'un triangle vaut π :

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \pi \quad \text{d'où} \quad \boxed{i = \alpha}$$

- 3 Justifier qu'une réflexion totale est possible. En déduire l'angle limite d'incidence.

Correction

Une réflexion totale n'est possible que lorsque la lumière passe d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent : c'est le cas ici puisque $n > n_a$ (rappel : $n = c/v \geq 1$).

L'angle limite d'incidence correspond à un angle de réfraction égal à $\pi/2$ (rayon réfracté rasant le dioptre).

D'après la loi de Snell-Descartes :

$$n \sin(i_{\text{lim}}) = n_a \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$$



- 4 Déduire de la question précédente l'indice optique minimal du prisme $n_{\min}$ en fonction de α pour qu'il y ait réflexion totale.

Correction

La réflexion est totale si $i > i_{\text{lim}}$, avec $i = \alpha$. La fonction sinus étant croissante sur $[0, \pi/2]$:

$$\alpha > \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \sin \alpha > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sin \alpha} = n_{\min}$$

- 5 Calculer $n_{\min}$ pour $\alpha = \pi/4$.

Correction

$$n_{\min} = \frac{1}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2}, \text{ soit } n_{\min} \simeq 1,41$$

- 6 Un verre typique a un indice optique autour de $n_v = 1,5$. Commenter votre résultat.

Correction

$n_v = 1,5 > n_{\min} \simeq 1,41$: la condition de réflexion totale est respectée pour le verre. Un prisme en verre d'angle au sommet 45° se comporte donc comme un miroir parfait (aucune perte par réflexion, contrairement à un miroir métallique). Le rayon ressort ensuite sous incidence normale par la face inférieure, sans déviation : il a été dévié de 90° au total.

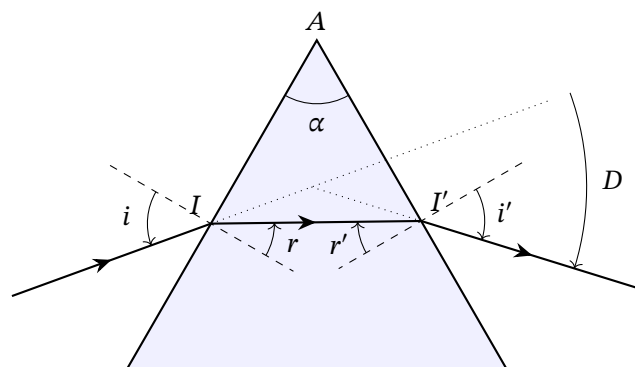
C'est notamment ce type de prisme qui est utilisé pour renvoyer la lumière dans les jumelles (prismes de Porro) ou les périscopes.

1.2 Déviation et mesure de l'indice optique

Dans cette partie, nous avons de nouveau un angle au sommet $\alpha > 0$. Le rayon n'entre plus sous incidence normale. L'angle d'incidence est i . Le prisme est placé sur un plateau tournant qui nous permet de faire varier i dans l'intervalle $[0; \pi/2[$.

On note I le point d'incidence sur la face d'entrée et I' le point d'émergence sur la face de sortie, r et r' les angles que fait le rayon dans le prisme avec les normales en I et I' , et i' l'angle d'émergence. La déviation D est l'angle entre la direction du rayon incident et celle du rayon émergent.

Les angles sont pris positifs dans le sens trigonométrique. Ainsi $i > 0$, mais $D < 0$.





1.2.1 Formules du prisme

- 7 Écrire les lois de Snell-Descartes pour la réfraction en I et en I' .

Correction

Avec $n_a = 1$:

$$\sin i = n \sin r \quad \text{et} \quad n \sin r' = \sin i'$$

- 8 En considérant le triangle $AI'I'$, montrer que $r - r' = \alpha$.

Correction

Avec l'orientation choisie, $r > 0$ et $r' < 0$ (on tourne dans le sens horaire de la normale vers le rayon en I') : la valeur géométrique de l'angle en I' est $|r'| = -r'$. Les normales étant perpendiculaires aux faces, l'angle en I du triangle $AI'I'$ (entre la face d'entrée et le rayon) vaut $\pi/2 - r$, et l'angle en I' vaut $\pi/2 - |r'| = \pi/2 + r'$. La somme des angles du triangle vaut π :

$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} + r'\right) = \pi \quad \text{d'où} \quad r - r' = \alpha$$

- 9 Exprimer l'angle dont le rayon est dévié lors de la traversée de chacun des deux dioptrés. En déduire que la déviation totale vaut $D = i' - i + \alpha$.

Correction

Les angles étant orientés, la déviation en un dioptré est l'angle orienté entre le rayon incident et le rayon réfracté, soit l'angle de réfraction moins l'angle d'incidence. En I , le rayon tourne de $D_1 = r - i < 0$ (sens horaire, vers la base du prisme). En I' , il tourne de $D_2 = i' - r' < 0$, dans le même sens. Les deux déviations s'ajoutent :

$$D = (r - i) + (i' - r') = i' - i + (r - r') \quad \text{d'où} \quad D = i' - i + \alpha$$

On vérifie que $D < 0$: $|D| = i + |i'| - \alpha$, que l'on retrouve en raisonnant sur les valeurs absolues des angles.

1.2.2 Condition d'émergence

- 10 À quelle condition sur r' le rayon ressort-il par la face de sortie ? (Attention au signe de r'). En déduire qu'il faut $i \geq i_0$ avec $\sin i_0 = n \sin(\alpha - i_{\text{lim}})$, où $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ est l'angle limite défini dans la partie précédente.

Correction

Le rayon émerge s'il n'y a pas réflexion totale en I' , c'est-à-dire si $|r'| \leq i_{\text{lim}}$, soit, puisque $r' < 0$:

$$r' \geq -i_{\text{lim}} = -\arcsin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or $r' = r - \alpha$, la condition s'écrit donc $r \geq \alpha - i_{\text{lim}}$. La fonction sinus étant croissante sur $[0, \pi/2]$, et $\sin r = \sin i/n$:

$$\sin r \geq \sin(\alpha - i_{\text{lim}}) \iff \sin i \geq n \sin(\alpha - i_{\text{lim}}) = \sin i_0 \iff i \geq i_0$$

Remarque : si $n \sin(\alpha - i_{\text{lim}}) > 1$ (c'est-à-dire $\alpha > 2i_{\text{lim}}$), aucun rayon n'émerge, quel que soit i .



- 11 Faire l'application numérique pour $n = 1,50$ et $\alpha = 60^\circ$.

Correction

$i_{\text{lim}} = \arcsin(1/1,50) \simeq 41,8^\circ$, donc $\alpha - i_{\text{lim}} \simeq 18,2^\circ$.

$$\sin i_0 = 1,50 \times \sin(18,2^\circ) \simeq 1,50 \times 0,312 \simeq 0,468$$

$$i_0 \simeq 27,9^\circ$$

Le rayon émerge pour $i \in [27,9^\circ; 90^\circ[$.

1.2.3 Minimum de déviation

En faisant tourner le plateau, on observe que la valeur absolue $|D|$ de la déviation passe par un minimum, obtenu pour une incidence i_m . On note $D_m < 0$ la déviation correspondante (minimum de déviation) et on admet que ce minimum est unique.

- 12 En utilisant le principe du retour inverse de la lumière, justifier qu'au minimum de déviation $i' = -i$.

Correction

Considérons le rayon d'incidence $i_m > 0$ qui émerge sous l'angle $i'_m < 0$ avec la déviation D_m . D'après le principe du retour inverse, le rayon arrivant sur la face de sortie sous l'incidence $|i'_m|$ suit le même trajet en sens inverse et ressort par la face d'entrée sous l'angle $|i_m|$. Par symétrie du prisme par rapport au plan bissecteur de α , cela revient à un rayon entrant par la face d'entrée avec l'incidence $-i'_m > 0$ et émergeant sous l'angle $-i_m < 0$. Sa déviation vaut $(-i_m) - (-i'_m) + \alpha = i'_m - i_m + \alpha = D_m$.

L'incidence $-i'_m$ donne donc elle aussi la déviation minimale. Le minimum étant unique, $-i'_m = i_m$, soit

$$i'_m = -i_m.$$

- 13 En déduire les valeurs de r et r' au minimum de déviation, puis montrer que :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha - D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Correction

$i' = -i$ donc, d'après les lois de Snell-Descartes, $\sin r' = -\sin r = \sin(-r)$ et, les angles étant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, $r' = -r$. Avec $r - r' = \alpha$: $r = \alpha/2$ et $r' = -\alpha/2$.

De plus $D_m = i'_m - i_m + \alpha = -2i_m + \alpha$ donc $i_m = \frac{\alpha - D_m}{2}$. La loi de Snell-Descartes en I donne alors $\sin i_m = n \sin(\alpha/2)$, soit :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha - D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

- 14 Pour un prisme d'angle $\alpha = 60^\circ$, on mesure $D_m = -37,2^\circ$. Calculer l'indice n du prisme. Commenter.



Correction

$$n = \frac{\sin(48,6^\circ)}{\sin(30^\circ)} \simeq \frac{0,750}{0,5} \quad \boxed{n \simeq 1,50}$$

C'est l'ordre de grandeur de l'indice d'un verre usuel. Cette méthode permet une mesure précise de l'indice : au voisinage du minimum, D varie très peu avec i , le minimum est donc facile à repérer en faisant tourner le plateau.

- 15 Le verre est un milieu dispersif : son indice dépend de la longueur d'onde selon la loi de Cauchy $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$, avec A et B des constantes positives. Qu'observe-t-on si l'on éclaire le prisme en lumière blanche ? Quelle radiation est la plus déviée ?

Correction

D'après la question précédente, $\sin\left(\frac{\alpha + |D_m|}{2}\right) = n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (car $D_m = -|D_m|$) : $|D_m|$ est une fonction croissante de n . Or n est d'autant plus grand que λ est petite. Chaque radiation est donc déviée différemment : la lumière blanche est décomposée en un spectre continu (phénomène de dispersion).

Le violet ($\lambda \simeq 400$ nm, n le plus grand) est le plus dévié, le rouge ($\lambda \simeq 800$ nm) le moins dévié.

Exercice 2 : Effet de serre

Les gaz principalement responsables de l'effet de serre sont la vapeur d'eau H_2O , le dioxyde de carbone CO_2 , le méthane CH_4 et le protoxyde d'azote N_2O . On s'intéresse aux atomes qui les composent, puis aux molécules elles-mêmes.

2.1 Représentation des atomes

Le carbone naturel est constitué principalement de deux isotopes, le carbone 12 et le carbone 13.

- 16 Donner la représentation symbolique ${}_Z^AX$ de ces deux isotopes, ainsi que celles de l'azote 14 et de l'oxygène 16.

Correction



- 17 Donner la composition du noyau de chacun de ces atomes. Qu'est-ce qui distingue deux isotopes ?



Correction

Le noyau contient Z protons et $N = A - Z$ neutrons :

Noyau	$^{12}_6\text{C}$	$^{13}_6\text{C}$	$^{14}_7\text{N}$	$^{16}_8\text{O}$
Protons Z	6	6	7	8
Neutrons N	6	7	7	8

Deux isotopes ont le même numéro atomique Z (même élément chimique) mais un nombre de neutrons différent, donc un nombre de masse A différent.

2.2 Structure électronique

- 18 Établir la configuration électronique dans l'état fondamental des atomes H, C, N et O.

Correction

- H ($Z = 1$) : $1s^1$
- C ($Z = 6$) : $1s^2 \underline{2s^2 2p^2}$
- N ($Z = 7$) : $1s^2 \underline{2s^2 2p^3}$
- O ($Z = 8$) : $1s^2 \underline{2s^2 2p^4}$

- 19 En déduire, pour chacun, le nombre d'électrons de valence ainsi que sa position (ligne, colonne) dans la classification périodique.

Correction

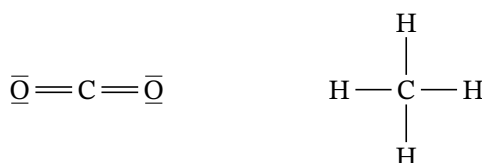
Le numéro de ligne correspond à la couche la plus haute occupée n ; les électrons de valence sont ceux de la couche n la plus élevée (soulignés dans la question précédente).

Atome	H	C	N	O
Électrons de valence	1	4	5	6
Ligne	1	2	2	2
Colonne	1	14	15	16

- 20 Donner les schémas de Lewis du dioxyde de carbone CO_2 et du méthane CH_4 .

Correction

CO_2 : $4 + 2 \times 6 = 16$ électrons de valence, soit 8 doublets. CH_4 : $4 + 4 \times 1 = 8$ électrons de valence, soit 4 doublets.



Tous les atomes (sauf H, règle du duet) respectent la règle de l'octet.

- 21 En proposer un pour le protoxyde d'azote N_2O où l'atome central est un atome d'azote. Faire apparaître les éventuelles charges formelles.



2026-2027

Correction

$2 \times 5 + 6 = 16$ électrons de valence, soit 8 doublets. Deux formes respectent l'octet :



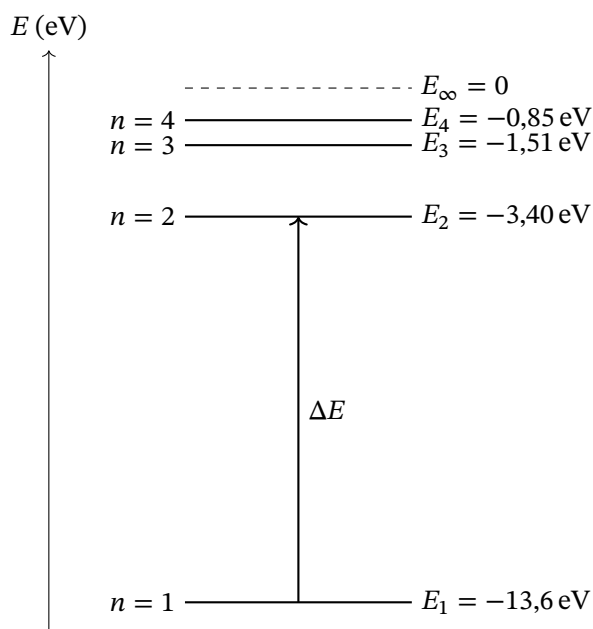
Charges formelles : l'azote central (4 liaisons, aucun doublet non liant) porte +1 ; l'atome terminal qui porte 3 doublets non liants et une seule liaison porte -1. La forme de gauche est la plus représentative, la charge négative étant portée par l'atome le plus électronégatif (O). Les deux formes sont acceptées.

2.3 Interaction avec le rayonnement

22 Représenter sur un diagramme les quatre premiers niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Correction

$E_1 = -13,6 \text{ eV}$, $E_2 = -3,40 \text{ eV}$, $E_3 = -1,51 \text{ eV}$, $E_4 = -0,85 \text{ eV}$.



23 Calculer la longueur d'onde du photon absorbé lors de la transition $n = 1 \rightarrow n = 2$. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-elle ?

Correction

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 13,6 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10,2 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8}{10,2 \times 1,602 \times 10^{-19}} \quad \boxed{\lambda \simeq 1,22 \times 10^{-7} \text{ m} = 122 \text{ nm}}$$

Cette longueur d'onde appartient au domaine de l'ultraviolet ($\lambda < 400 \text{ nm}$).

La Terre, de température moyenne de surface $T_T \simeq 290 \text{ K}$, émet un rayonnement thermique principalement autour de la longueur d'onde λ_{max} donnée par la loi de Wien :

$$\lambda_{\text{max}} T_T = 2,90 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$





C'est une partie de ce rayonnement qui est absorbée par les gaz à effet de serre.

- 24 Calculer $\lambda_{\max}$ et l'énergie (en eV) d'un photon de cette longueur d'onde.

Correction

$$\lambda_{\max} = \frac{2,90 \times 10^{-3}}{290} = 1,00 \times 10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m} \quad (\text{infrarouge})$$

$$E = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{1,99 \times 10^{-25}}{1,00 \times 10^{-5}} \simeq 1,99 \times 10^{-20} \text{ J} \quad \boxed{E \simeq 0,12 \text{ eV}}$$

- 25 Comparer cette énergie à celle trouvée en Q23. L'absorption du rayonnement terrestre par les gaz à effet de serre peut-elle s'expliquer par des transitions électroniques ?

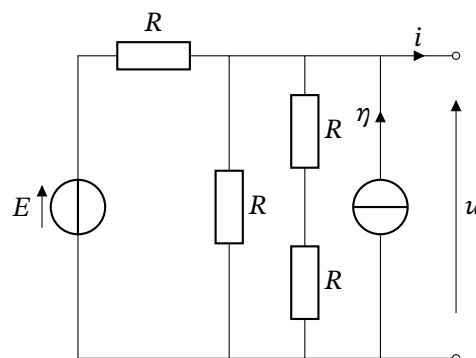
Correction

$0,12 \text{ eV} \ll 10,2 \text{ eV}$: l'énergie d'un photon infrarouge terrestre est environ 100 fois trop faible pour provoquer une transition électronique, dont l'ordre de grandeur est de quelques eV (UV-visible). L'absorption ne peut donc pas s'expliquer par des transitions électroniques.

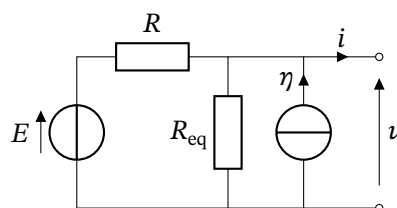
Remarque : elle s'explique par des transitions entre niveaux d'énergie de *vibration* des molécules (déformation et élongation des liaisons, par exemple dans CO_2 ou H_2O), dont les écarts d'énergie sont de l'ordre de 0,1 eV, et dans une moindre mesure de rotation (hors-programme).

Exercice 3 : Caractéristique d'un circuits

Nous étudions le circuit ci-dessous, alimenté par une source idéale de tension E et une source idéale de courant η . On note u la tension entre les bornes de sortie et i le courant débité.



- 26 Montrer que le schéma ci-dessus est équivalent au schéma ci-dessous. Exprimer R_{eq} en fonction de R .





Correction

Les deux résistances R de droite sont en série : elles forment une branche $2R$. Cette branche est en parallèle avec la résistance R verticale (mêmes nœuds : le nœud du haut et la masse) :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \frac{2R}{3}.$$

Contrôle : $R_{\text{eq}} < R$, une association parallèle est toujours plus « facile » à traverser que la branche la plus facile.

- 27 Montrer, en appliquant la loi des nœuds au nœud supérieur, que la relation entre i et u peut s'écrire :

$$E + \eta R = \frac{5}{2}u + Ri$$

Correction

Le nœud supérieur est au potentiel u (la masse est en bas). Courants qui *arrivent* au nœud : $\frac{E-u}{R}$ (branche du générateur) et η . Courants qui *partent* : $\frac{u}{R_{\text{eq}}} = \frac{3u}{2R}$ et i .

$$\frac{E-u}{R} + \eta = \frac{3u}{2R} + i \quad \xrightarrow{\times R} \quad E + \eta R = \left(1 + \frac{3}{2}\right)u + Ri = \frac{5}{2}u + Ri.$$

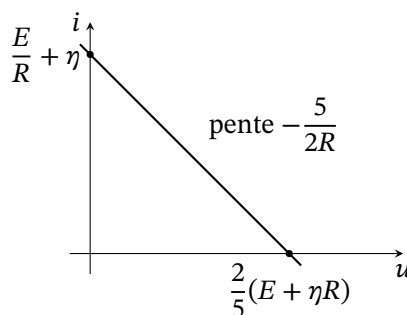
Contrôle dimensionnel : chaque terme est une tension.

- 28 Tracer la caractéristique $i = f(u)$. Préciser les points de fonctionnement à courant nul et tension nulle ainsi que la pente.

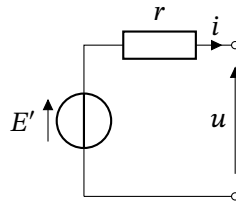
Correction

$i = \frac{E}{R} + \eta - \frac{5}{2R}u$: c'est une droite décroissante.

- tension nulle (court-circuit) : $i_{\text{cc}} = \frac{E}{R} + \eta$;
- courant nul (circuit ouvert) : $u_0 = \frac{2}{5}(E + \eta R)$;
- pente : $\frac{di}{du} = -\frac{5}{2R}$.



- 29 Le circuit est alors équivalent à un générateur de Thévenin de tension E' et résistance interne r :



Déterminer E' et r pour que les deux montages soient équivalents.

Correction

Pour le générateur de Thévenin : $u = E' - r i$. On isole u dans la relation de la question 2 :

$$u = \frac{2}{5} (E + \eta R) - \frac{2R}{5} i \quad \Rightarrow \quad E' = \frac{2}{5} (E + \eta R) = u_0, \quad r = \frac{2R}{5}.$$

Deux montages sont équivalents s'ils ont la même caractéristique $i = f(u)$: on identifie donc terme à terme.

Exercice 4 : Chauffage d'une pièce

Nous cherchons à déterminer l'effet de l'allumage et de l'extinction d'un radiateur sur la température d'une pièce.

Nous notons $T(t)$ la température de la pièce, qui dépend du temps, et T_{ext} la température extérieure, qui sera supposée constante.

Les échanges thermiques entre l'intérieur de la pièce et l'extérieur peuvent se modéliser par une analogie électrique¹ :

- une résistance thermique R_{th} , qui modélise la résistance des murs à la conduction de la chaleur ;
- une capacité thermique C_{th} , qui modélise l'énergie qu'il faut fournir à la pièce pour élever sa température.

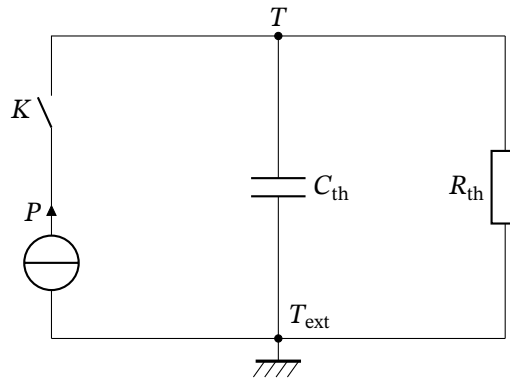
Dans cette analogie, les grandeurs thermiques et électriques se correspondent de la façon suivante :

Électrocinétique	Thermique
Potentiel V (V)	Température T (K)
Intensité i (A)	Puissance thermique P (W)
Résistance R (Ω)	Résistance thermique R_{th} ($\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$)
Capacité C (F)	Capacité thermique C_{th} ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)

Le radiateur, qui fournit une puissance P constante lorsqu'il est allumé, est modélisé par une source idéale de courant. Le chauffage peut ainsi se modéliser par le schéma électrique équivalent suivant, où la température T de la pièce est le potentiel du nœud repéré, la masse servant de référence est la température extérieure :

1. Nous établirons cette analogie dans un prochain cours de thermodynamique.





Données : $R_{th} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, $C_{th} = 3,6 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $P = 2,0 \text{ kW}$, $T_{ext} = 5^\circ \text{C}$.

Les lois de l'électrocinétique restent alors valables en adaptant les notations.

- 30 Donner les lois de comportement de l'électrocinétique avec les notations de la thermique pour une résistance et un condensateur.

Pour la suite, pour le condensateur, comme la température extérieure est constante, nous pourrions utiliser :

$$P = C_{th} \frac{dT}{dt}$$

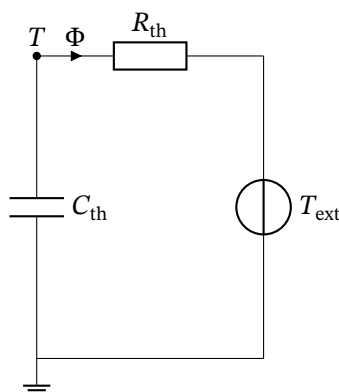
4.1 Retour à l'équilibre

Dans une première partie, nous étudions le cas où le radiateur est éteint (K est ouvert). La température initiale de la pièce est $T_{ini} > T_{ext}$.

- 31 Représenter le circuit équivalent.

Correction

K ouvert : aucun courant (aucune puissance) ne provient de la branche du radiateur. Il reste un circuit RC série alimenté par T_{ext} .



- 32 En déduire l'équation différentielle sur la température :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{th}C_{th}} = \frac{T_{ext}}{R_{th}C_{th}}$$



Correction

Loi des nœuds au nœud T : le courant sortant par le condensateur et celui sortant par la résistance ont une somme nulle.

$$C_{th} \frac{dT - T_{ext}}{dt} + \frac{T - T_{ext}}{R_{th}} = 0$$

En divisant par C_{th} :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{th}C_{th}} = \frac{T_{ext}}{R_{th}C_{th}}$$

On pose $\tau = R_{th}C_{th}$, constante de temps du système.

- 33 Sans calcul, donner la température finale dans la pièce et le temps qu'il faudra pour l'atteindre. Faire l'application numérique.

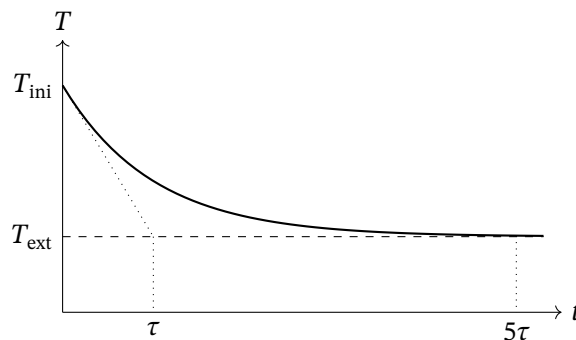
Correction

En régime permanent, $\frac{dT}{dt} = 0$ (le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert) donc $T_{\infty} = T_{ext}$. Le régime permanent est atteint à 1 % près au bout de 5τ , avec $\tau = R_{th}C_{th} = 1,0 \times 10^{-2} \times 3,6 \times 10^5 = 3,6 \times 10^3 \text{ s} = 1,0 \text{ h}$, soit $5\tau \simeq 5 \text{ h}$.

- 34 Esquisser le graphe de la température en fonction du temps. Vous ferez apparaître les caractéristiques remarquables de la courbe.

Correction

$T(t) = T_{ext} + (T_{ini} - T_{ext})e^{-t/\tau}$: décroissance exponentielle de T_{ini} vers l'asymptote T_{ext} . La tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$. (On peut aussi représenter la méthode des 63 %.)



4.2 Chauffage

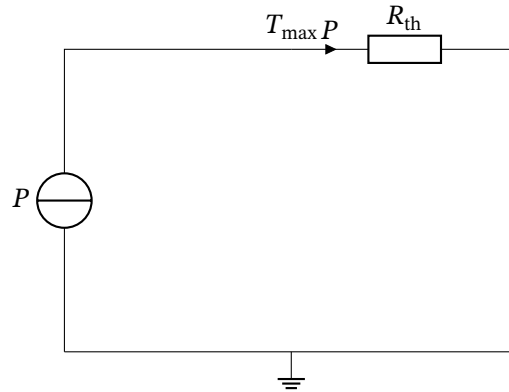
Nous étudions maintenant le cas où le chauffage est allumé (K est fermé). La température initiale de la pièce est toujours prise égale à T_{ini} .

- 35 Représenter le schéma équivalent en régime permanent. En déduire la température finale maximale T_{max} atteinte en fonction de P , T_{ext} et R_{th} . Faire l'application numérique.



Correction

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : toute la puissance P traverse R_{th} .



Loi d'Ohm thermique : $T_{max} - T_{ext} = R_{th}P$ donc

$$T_{max} = T_{ext} + R_{th}P = 5 + 1,0 \times 10^{-2} \times 2,0 \times 10^3 = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$$

- 36 Sur quels paramètres peut-on jouer pour avoir une température plus élevée dans la pièce. Justifier que l'ordre de grandeur des radiateurs soit de 2 kW.

Correction

On peut jouer sur la puissance des radiateurs. Il est aussi possible de placer plusieurs radiateurs en parallèles pour avoir plus de puissance.

Si la puissance d'un radiateur valait $P = 1 \text{ kW}$, alors la température atteinte ne serait plus que de $15 \text{ } ^\circ\text{C}$, radiateur sous-dimensionné. Si la puissance d'un radiateur valait $P = 4 \text{ kW}$, alors la température atteinte ne serait plus que de $45 \text{ } ^\circ\text{C}$, radiateur sur-dimensionné.

Remarque : la puissance du radiateur doit-être adaptée au volume de la pièce et à ses pertes thermiques. Le nombre de radiateurs, vient s'adapter à la surface de la pièce et à sa géométrie.

- 37 Déterminer l'équation différentielle sur la température T :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{th}C_{th}} = \frac{T_{ext}}{R_{th}C_{th}} + \frac{P}{C_{th}}$$

Correction

Loi des nœuds au nœud T : la puissance P entrante se répartit entre le condensateur et la résistance.

$$P = C_{th} \frac{dT - T_{ext}}{dt} + \frac{T - T_{ext}}{R_{th}}$$

En divisant par C_{th} :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{th}C_{th}} = \frac{T_{ext}}{R_{th}C_{th}} + \frac{P}{C_{th}}$$

- 38 Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression de $T(t)$.



Correction

Solution homogène : $A e^{-t/\tau}$. Solution particulière constante : $T_{\max} = T_{\text{ext}} + R_{\text{th}}P$. Condition initiale : $T(0) = T_{\text{ini}}$ (continuité de la température, analogue à la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur) donc $A = T_{\text{ini}} - T_{\max}$:

$$T(t) = T_{\max} + (T_{\text{ini}} - T_{\max}) e^{-t/\tau}$$

4.3 Cycle de chauffage

Nous partons d'une situation où la température initiale est égale à la température extérieure. À l'instant initial, nous allumons le chauffage (K se ferme à $t = 0$). Puis, nous l'éteignons pour la nuit suivante. Le chauffage suit donc le cycle d'allumage et d'extinction suivant, de période 24 h :



39 Donner l'expression de $T(t)$ pour $0 \leq t \leq 12$ h.

Correction

D'après la question Q38 avec $T_{\text{ini}} = T_{\text{ext}}$:

$$T(t) = T_{\text{ext}} + R_{\text{th}}P(1 - e^{-t/\tau})$$

40 Justifier que le régime permanent est atteint lorsque l'on éteint le chauffage. Quelle est alors la température de la pièce ?

Correction

$\tau = 1,0$ h donc $5\tau = 5$ h < 12 h : le régime permanent est atteint bien avant l'extinction. La pièce est alors à $T_{\max} = 25^\circ\text{C}$.

41 Donner l'expression de $T(t)$ pour $12 \text{ h} \leq t \leq 24$ h. Quelle est la température de la pièce à $t = 24$ h ?

Correction

On retrouve le retour à l'équilibre étudié en première partie, avec $T(12 \text{ h}) = T_{\max}$ et une origine des temps décalée :

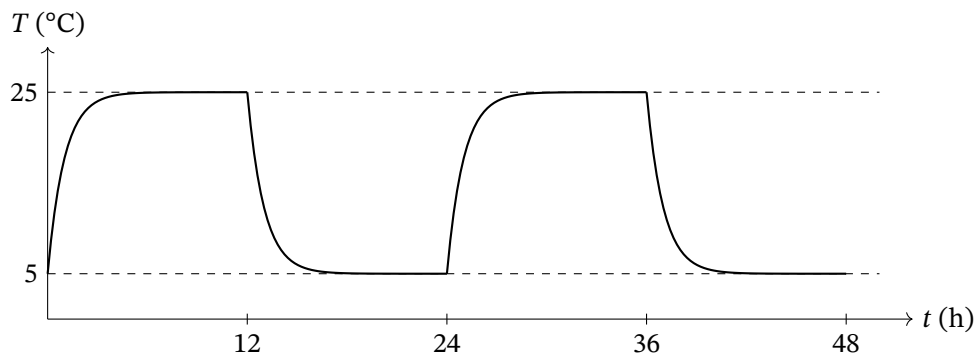
$$T(t) = T_{\text{ext}} + R_{\text{th}}P e^{-(t-12\text{h})/\tau}$$

À nouveau $12 \text{ h} > 5\tau$ donc $T(24 \text{ h}) \simeq T_{\text{ext}} = 5^\circ\text{C}$: on retrouve la situation initiale, le phénomène est périodique.

42 Tracer l'allure de $T(t)$ sur 48 h.



Correction



- 43 Calculer l'énergie électrique consommée par le radiateur en une journée (en kWh). Ce mode de chauffage vous semble-t-il satisfaisant ?

Correction

$$E = P \times 12 \text{ h} = 2,0 \text{ kW} \times 12 \text{ h} = 24 \text{ kWh.}$$

Le confort n'est pas satisfaisant : la pièce est trop chaude le jour (25 °C) et très froide la nuit (5 °C). L'énergie dépensée à maintenir 25 °C est en partie gaspillée. D'où l'intérêt d'une régulation (programmation ou thermostat).

- 44 Je quitte mon domicile à 8 h en éteignant le chauffage ; la pièce est alors à 25 °C. Si je rentre chez moi à 18 h, à quelle heure doit se déclencher le chauffage pour qu'il fasse 19 °C quand je rentre ?

Correction

Le chauffage étant éteint pendant plusieurs heures ($> 5\tau$), la pièce est revenue à T_{ext} au moment du déclenchement (à vérifier *a posteriori*). D'après l'expression de $T(t)$ sur la phase de chauffage, la durée Δt nécessaire pour passer de T_{ext} à $T_f = 19^\circ\text{C}$ vérifie :

$$T_f = T_{\text{ext}} + R_{\text{th}}P(1 - e^{-\Delta t/\tau}) \iff \Delta t = \tau \ln\left(\frac{R_{\text{th}}P}{T_{\text{ext}} + R_{\text{th}}P - T_f}\right)$$

$$\Delta t = 1,0 \text{ h} \times \ln\left(\frac{20}{6}\right) \simeq 1,20 \text{ h} \simeq 1 \text{ h } 12 \text{ min.}$$

Le chauffage doit se déclencher vers **16 h 48**. Il a alors été éteint pendant près de 9 h $> 5\tau$: l'hypothèse est validée.

4.4 Thermostat

Pour ne plus avoir à allumer et éteindre le radiateur à la main, nous branchons dessus un thermostat.

Quand la température atteint $T_{\text{cons}} = 19^\circ\text{C}$, le chauffage s'arrête, et dès qu'elle passe en dessous d'une température $T_a = 18^\circ\text{C}$, il se rallume. Le régime de fonctionnement du thermostat est supposé établi : la température oscille entre T_a et T_{cons} .

- 45 À quelle condition sur T_{cons} ce thermostat peut-il fonctionner ? Est-elle vérifiée ?



Correction

Lors du chauffage, la température tend vers $T_{\max} = T_{\text{ext}} + R_{\text{th}}P$ sans jamais la dépasser. Il faut donc $T_{\text{cons}} < T_{\text{ext}} + R_{\text{th}}P$, sinon le radiateur ne s'éteint jamais. Ici $T_{\text{cons}} = 19^\circ\text{C} < 25^\circ\text{C}$: la condition est vérifiée.

- 46 Le radiateur s'éteint lorsque $T = T_{\text{cons}}$. Exprimer la durée t_{off} pendant laquelle il reste éteint, puis faire l'application numérique.

Correction

Pendant la phase de refroidissement (origine des temps prise à l'extinction) : $T(t) = T_{\text{ext}} + (T_{\text{cons}} - T_{\text{ext}})e^{-t/\tau}$.
Le radiateur se rallume quand $T = T_a$:

$$t_{\text{off}} = \tau \ln \left(\frac{T_{\text{cons}} - T_{\text{ext}}}{T_a - T_{\text{ext}}} \right) = 1,0 \text{ h} \times \ln \left(\frac{14}{13} \right) \simeq 0,074 \text{ h} \simeq 4,4 \text{ min}$$

- 47 Exprimer de même la durée t_{on} pendant laquelle le radiateur reste allumé, puis faire l'application numérique.

Correction

Pendant la phase de chauffage (origine des temps prise à l'allumage) : $T(t) = T_{\max} + (T_a - T_{\max})e^{-t/\tau}$. Le radiateur s'éteint quand $T = T_{\text{cons}}$:

$$t_{\text{on}} = \tau \ln \left(\frac{T_{\max} - T_a}{T_{\max} - T_{\text{cons}}} \right) = 1,0 \text{ h} \times \ln \left(\frac{7}{6} \right) \simeq 0,154 \text{ h} \simeq 9,2 \text{ min}$$

- 48 Esquisser l'allure de $T(t)$ en régime établi sur quelques cycles.

Correction

La température oscille entre $T_a = 18^\circ\text{C}$ et $T_{\text{cons}} = 19^\circ\text{C}$: portions d'exponentielles croissantes (concaves, tendant vers 25°C) de durée $t_{\text{on}} \simeq 9 \text{ min}$, alternant avec des portions d'exponentielles décroissantes (convexes, tendant vers 5°C) de durée $t_{\text{off}} \simeq 4 \text{ min}$. Sur un intervalle aussi faible devant τ , chaque portion est quasiment rectiligne : l'allure est en dents de scie.



Formulaire

Données numériques

- $\arcsin\left(\frac{1}{1,50}\right) \simeq 41,8^\circ$; $\sin(18,2^\circ) \simeq 0,312$; $\arcsin(0,468) \simeq 27,9^\circ$; $\sin(48,6^\circ) \simeq 0,750$
- $\sqrt{2} \simeq 1,414$; $\frac{6,63 \times 3,00}{10,2 \times 1,602} \simeq 1,22$; $\frac{1,99}{1,602} \simeq 1,24$
- $\ln\left(\frac{10}{3}\right) \simeq 1,20$; $\ln\left(\frac{7}{6}\right) \simeq 0,154$; $\ln\left(\frac{14}{13}\right) \simeq 0,074$; $e^{-5} \simeq 6,7 \times 10^{-3}$

Données physico-chimiques

- Numéros atomiques : H ($Z = 1$), C ($Z = 6$), N ($Z = 7$), O ($Z = 8$)
- Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Produit $hc \simeq 1,99 \times 10^{-25} \text{ J} \cdot \text{m}$
- Charge électrique élémentaire : $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène : $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ (en eV)