



DM 1 | Électrocinétique

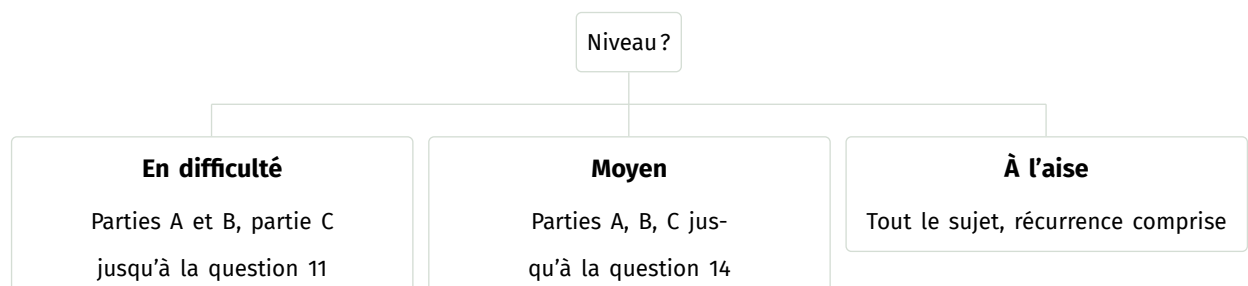
Résistances



Consignes

Chercher seul avant tout travail en groupe. Travailler en plusieurs séances courtes réparties sur la semaine : c'est ce qui fait retenir. Rédiger au propre, encadrer les résultats, vérifier l'homogénéité de chaque expression obtenue.

Travail à faire — selon le niveau d'aisance



Exercice 1 : Cinéma de réalité virtuelle

Dans un cinéma de réalité virtuelle, tous les spectateurs voient en même temps le même film dans leur casque.

De manière extrêmement simplifiée, on modélise la salle par une association de N casques de résistance d'entrée R , tous alimentés par un même générateur idéal de force électromotrice e .

L'exploitant impose deux critères :

- **(C1)** le courant délivré par le générateur ne doit pas dépendre du nombre N de casques installés : on doit pouvoir équiper une petite ou une grande salle avec le même générateur. Cela signifie que la résistance équivalente R_{eq} de l'association ne doit pas dépendre de N ;
- **(C2)** un spectateur qui éteint son casque ne doit pas empêcher les autres de voir le film.

Un casque éteint est modélisé par un interrupteur ouvert.

Rappel : la puissance électrique reçue par un dipôle résistif de résistance R soumis à une tension u et traversé par un courant i est $P = R i^2 = u^2/R$.

Association en série ou en parallèle

- 1 Justifier qu'associer les casques en série ne peut pas convenir.



Correction

(C2) Si un casque est éteint, l'interrupteur ouvert coupe l'unique maille : le courant est nul dans tout le circuit, aucun casque n'est alimenté.

(C1) De plus, les résistances en série s'ajoutent : $R_{eq} = NR$, qui dépend de N .

Plutôt qu'associer les casques en série, on envisage de les associer en parallèle.

2 Donner la résistance équivalente à l'ensemble des N casques.

Correction

En parallèle, les conductances (inverse des résistances) s'ajoutent : $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R} = \frac{N}{R}$, soit

$$R_{eq} = \frac{R}{N}$$

Vérification : pour $N = 1$ on retrouve bien R ; plus on ajoute de branches, plus le courant passe facilement, R_{eq} diminue.

3 Justifier que ce type d'association ne convient pas non plus.

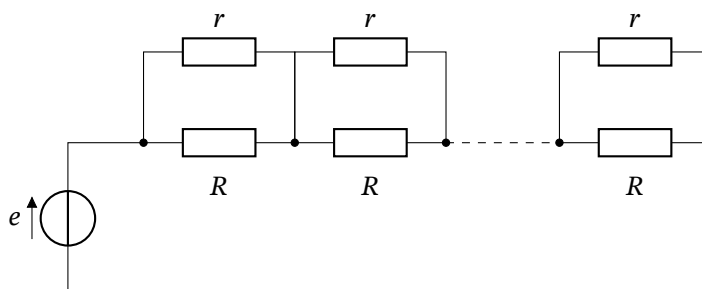
Correction

(C2) est vérifié : chaque casque est directement branché aux bornes du générateur idéal, il est soumis à e quel que soit l'état des autres.

(C1) n'est pas vérifié : le générateur débite $i = \frac{e}{R_{eq}} = \frac{Ne}{R}$, proportionnel au nombre de casques. Une grande salle exige un générateur capable de débiter un très grand courant.

Association avec résistances de shunt

Une autre solution envisagée consiste à associer les casques en série, mais en ajoutant une résistance r de « shunt »¹ en parallèle de chaque casque.



4 Justifier que, dans ce cas, un casque éteint ne coupe pas l'alimentation des autres casques.

1. shunt = dérivation



Correction

Si un casque est éteint, sa branche est ouverte, mais le courant peut toujours passer par la résistance de shunt r placée en parallèle : la maille n'est pas coupée et les autres casques restent alimentés. Le critère **(C2)** est donc vérifié.

5 Donner la résistance équivalente pour une association de 2 casques. Puis de 3 casques.

Correction

Chaque bloc « casque || shunt » a pour résistance $R_{||} = \frac{Rr}{R+r}$, et les blocs sont en série :

$$R_{eq}(2) = \frac{2Rr}{R+r} \quad R_{eq}(3) = \frac{3Rr}{R+r}$$

6 Donner la résistance équivalente pour une association de N casques.

Correction

N blocs identiques en série :

$$R_{eq}(N) = N \frac{Rr}{R+r}$$

7 Vérifier la cohérence du résultat précédent dans les cas limites $r \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$. Interpréter physiquement chacun de ces cas.

Correction

- $r \rightarrow +\infty$: $\frac{Rr}{R+r} \rightarrow R$, donc $R_{eq} \rightarrow NR$. Un shunt de résistance infinie est un interrupteur ouvert : on retrouve l'association série de la partie A.
- $r \rightarrow 0$: $R_{eq} \rightarrow 0$. Un shunt de résistance nulle est un fil : il court-circuite chaque casque, qui ne reçoit plus de courant.

8 Existe-t-il une valeur de r pour que la résistance équivalente ne dépende pas de N ? Si oui, déterminer cette valeur en fonction de R . Sinon, conclure sur cette méthode.

Correction

$R_{eq}(N)$ est proportionnelle à N ; elle n'en dépend pas si et seulement si le coefficient $\frac{Rr}{R+r}$ est nul, c'est-à-dire $r = 0$. Mais alors (question précédente) tous les casques sont court-circuités et le générateur idéal débiterait un courant infini.

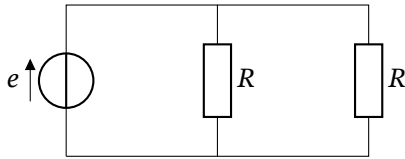
Conclusion : cette méthode règle le problème des casques éteints **(C2)**, mais ne permet pas de satisfaire **(C1)**.

Association mixte

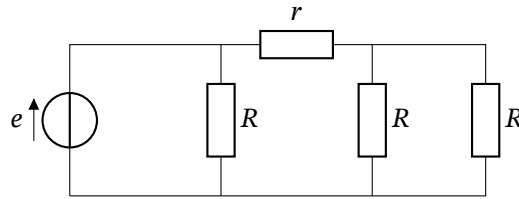
Un schéma d'association plus astucieux est représenté figure ci-dessous : les casques aux extrémités sont montés en parallèle et tous les casques intercalés entre eux sont accompagnés d'une résistance r , que l'on cherche à déterminer.



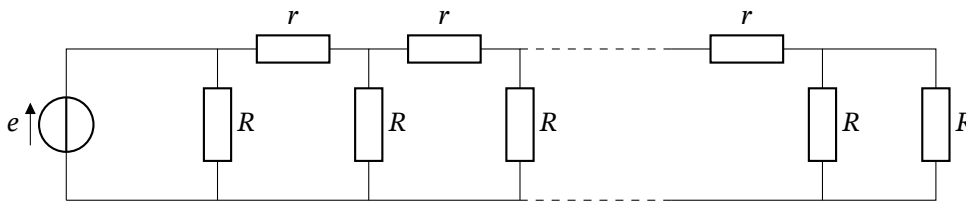
Cas pour deux casques :



Cas pour trois casques :



Cas pour N casques :



9 Donner la résistance équivalente à l'association de deux casques $R_{eq}(2)$.

Correction

Deux résistances R en parallèle :

$$R_{eq}(2) = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$$

10 Montrer que l'association de trois casques a pour résistance équivalente :

$$R_{eq}(3) = \frac{R(R/2 + r)}{3R/2 + r}$$

Correction

On réduit le circuit en partant du point le plus éloigné du générateur :

1. les deux derniers casques sont en parallèle : $R/2$;
2. ce bloc est en série avec r : $r + R/2$;
3. l'ensemble est en parallèle avec le premier casque :

$$R_{eq}(3) = \frac{R(r + R/2)}{R + r + R/2} = \frac{R(R/2 + r)}{3R/2 + r}$$

Homogénéité : $\frac{\Omega \times \Omega}{\Omega} = \Omega$.

11 En déduire la valeur de r en fonction de R pour que l'association de trois casques soit équivalente à l'association de deux casques.

Correction

On impose $R_{eq}(3) = R_{eq}(2)$:

$$\frac{R(R/2 + r)}{3R/2 + r} = \frac{R}{2} \iff 2\left(\frac{R}{2} + r\right) = \frac{3R}{2} + r \iff R + 2r = \frac{3R}{2} + r \iff r = \frac{R}{2}$$

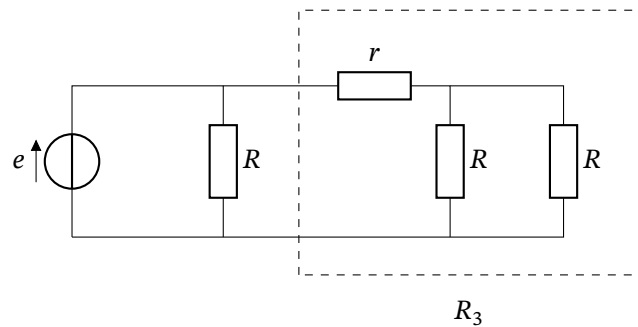
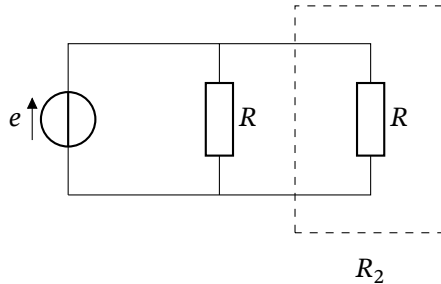


Nous souhaitons maintenant généraliser ce raisonnement à N casques. Le calcul de la résistance équivalente n'est pas faisable directement, nous proposons de raisonner par récurrence.

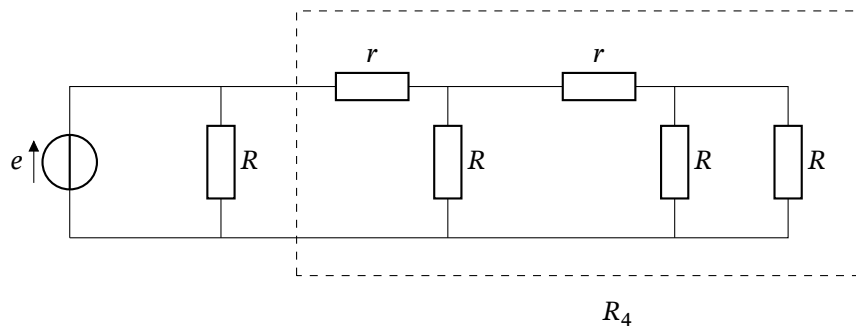
Notation. Pour une salle de N casques, on note R_N la résistance équivalente à *tout ce qui est à droite du premier casque* (encadré en pointillés ci-dessous). Attention : R_N n'est pas la résistance équivalente $R_{eq}(N)$ de la salle.

Pour $N = 3$:

Pour $N = 2$:



Pour $N = 4$:



12 Exprimer $R_{eq}(N)$ en fonction de R et R_N . En déduire que :

$$R_{eq}(N) = \frac{R}{2} \iff R_N = R$$

Donner les valeurs de R_2 et de R_3 (pour $r = R/2$) et vérifier cette équivalence.

Correction

Le premier casque est en parallèle avec le bloc R_N :

$$R_{eq}(N) = \frac{R R_N}{R + R_N}$$

Alors $R_{eq}(N) = \frac{R}{2} \iff 2R_N = R + R_N \iff R_N = R$.

Vérification : $R_2 = R$ (un seul casque dans l'encadré) et $R_3 = r + \frac{R}{2} = R$ pour $r = R/2$; on retrouve $R_{eq}(2) = R_{eq}(3) = R/2$.

13 Exprimer R_4 en fonction de R_3 , R et r .



2026-2027

Correction

Dans l'encadré de $N = 4$, on trouve r en série avec l'ensemble « casque en B || reste du circuit »; ce reste est exactement le bloc R_3 :

$$R_4 = r + \frac{R R_3}{R + R_3}$$

- 14 En déduire que, pour une association de quatre casques, la valeur $r = R/2$ trouvée à la question 11 assure encore $R_{eq}(4) = R_{eq}(2)$.

Correction

Avec $r = R/2$: $R_3 = R$, d'où $R_4 = \frac{R}{2} + \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$. D'après la question 12, $R_{eq}(4) = R/2$: la valeur $r = R/2$ convient encore.

Pour aller plus loin : sans utiliser le résultat de la question 11, imposer $R_4 = R$ avec $R_3 = r + R/2$ conduit à $r^2 + \frac{3}{2}Rr - R^2 = 0$, dont la seule racine positive est $r = R/2$.

- 15 Exprimer R_N en fonction de R_{N-1} , R et r .

Correction

Le raisonnement de la question 13 est valable pour tout $N \geq 3$:

$$R_N = r + \frac{R R_{N-1}}{R + R_{N-1}}$$

- 16 En procédant par récurrence, montrer que pour $r = R/2$, on a $R_N = R$ pour tout $N \geq 2$. Conclure sur le critère (C1).

Correction

Soit $\mathcal{P}(N)$: « $R_N = R$ », avec $r = R/2$.

- **Initialisation** : $R_2 = R$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- **Hérédité** : supposons $\mathcal{P}(N-1)$ vraie pour un $N \geq 3$. Alors $R_N = \frac{R}{2} + \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$, donc $\mathcal{P}(N)$ est vraie.
- **Conclusion** : $\forall N \geq 2, R_N = R$, donc d'après la question 12 :

$$\forall N \geq 2, \quad R_{eq}(N) = \frac{R}{2}$$

Le critère (C1) est satisfait : le générateur débite $i = 2e/R$ quelle que soit la taille de la salle.

Remarque : cette récurrence montre que $r = R/2$ est *suffisante*; la question 11 montre qu'elle est *nécessaire* (dès $N = 3$). C'est donc la seule valeur qui convient.

