

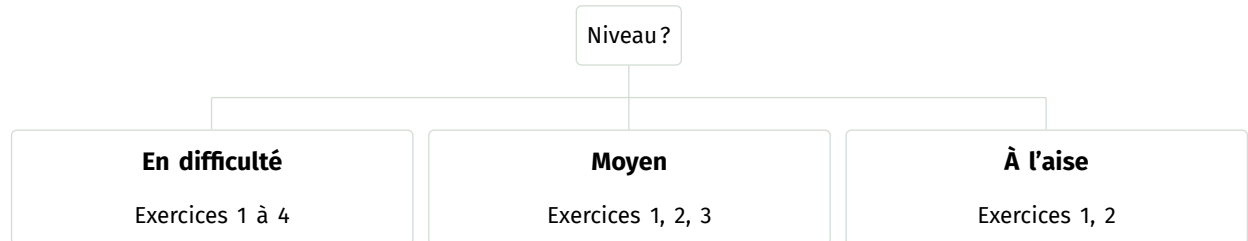


TD E2 | Électrocinétique

Circuits du premier ordre



Difficulté croissante au long de la fiche. Consigne : rédiger au propre, faire figurer les unités à chaque étape.



Exercices complémentaires disponibles dans le cahier d'entraînement : **4.7** à **4.15**



QR vers le cahier

Exercice 1 : équation différentielle 1/2

Savoir-faire

- reconnaître une équation différentielle, et ses caractéristiques ;
- résoudre une équation différentielle d'ordre 1 ;

Difficulté : ● ○ ○



Méthode

[breakable] **Cadre de ce que l'on sait faire** : équation différentielle linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre nul ou constant.

1. Mettre sous forme canonique :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{y_{\infty}}{\tau} \quad \text{avec } \tau \text{ (en s) et } y_{\infty} \text{ (unité de } y) \text{ constants.}$$

Identifier τ et y_{∞} et vérifier leurs unités.

2. Solution de l'équation homogène $\frac{dy_h}{dt} + \frac{y_h}{\tau} = 0$: $y_h(t) = \lambda e^{-t/\tau}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Solution particulière de la forme du second membre (constante) : $y_p' = 0$ donc $y_p = y_{\infty}$.

4. Solution générale : $y(t) = \lambda e^{-t/\tau} + y_{\infty}$.

5. Condition initiale sur la solution complète : $y(0) = \lambda + y_{\infty} = y_0$ donc $\lambda = y_0 - y_{\infty}$:

$$y(t) = y_{\infty} + (y_0 - y_{\infty}) e^{-t/\tau}$$

6. Vérifier : $y(0) = y_0$? $\lim_{t \rightarrow \infty} y = y_{\infty}$ si $\tau > 0$? Homogénéité ? L'allure est-elle cohérente avec la situation ?

Les fonctions x, y, u, v, i, θ, T et N dépendent du temps t . Les grandeurs $a, m, g, k, E, \tau, \omega, \omega_0, Q, X_0$ et T_{ext} sont des constantes strictement positives.

a) $\tau \dot{u} + u = E$

b) $\dot{y} = 3 - 2y$

c) $m \dot{v} = mg - kv^2$

d) $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$

e) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

f) $t \dot{y} + y = 0$

g) $\dot{u} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau} \cos(\omega t)$

h) $y \dot{y} = 1$

i) $\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}$

j) $\frac{dT}{dt} = \frac{T_{\text{ext}} - T}{\tau}$

k) $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0$

l) $\dot{y} = y + t$

- 1 Reproduire et compléter le tableau suivant (L = linéaire, NL = non linéaire ; pour le second membre : nul, constant, ou préciser sa forme). Pour chaque équation non linéaire, souligner le terme responsable.



Équation	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
L / NL												
Ordre												
Coeff. const. ?												
Second membre												

- 2 Parmi ces équations, lesquelles relèvent de la méthode vue en cours ? Pour chacune des autres, indiquer en une phrase *pourquoi* la méthode ne s'applique pas.
- 3 Pour les équations retenues, écrire la forme canonique, identifier τ et y_∞ (avec leur unité quand c'est possible), puis résoudre avec les conditions initiales :

a) $u(0) = 0$ b) $y(0) = 0$ i) $N(0) = N_0$ j) $T(0) = T_0$

Corrigé

	L/NL	Ordre	Coeff. const.	Second membre	Remarque
a	L	1	oui	constant (E)	τ en s, $u_\infty = E$
b	L	1	oui	constant	$y' + 2y = 3 : \tau = 1/2, y_\infty = 3/2$
c	NL	1	–	–	terme v^2
d	NL	2	–	–	terme $\sin \theta$
e	L	2	oui	nul	oscillateur harmonique
f	L	1	non (t)	nul	coefficient t devant y'
g	L	1	oui	sinusoïdal	hors méthode (second membre)
h	NL	1	–	–	produit $y y'$
i	L	1	oui	nul	décroissance radioactive
j	L	1	oui	constant	$T' + T/\tau = T_{\text{ext}}/\tau$
k	L	2	oui	constant	oscillateur amorti
l	L	1	oui	affine (t)	$y' - y = t$: hors méthode

Relèvent de la méthode : a, b, i, j.

- a) $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$
- b) $y(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t})$
- i) $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$
- j) $T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})e^{-t/\tau}$

Piège non solvables : f) est linéaire mais à coefficient non constant ; l) est linéaire à coefficients constants, mais son second membre n'est pas constant.



Exercice 2 : équation différentielle 2/2

Savoir-faire

- reconnaitre une équation différentielle, et ses caractéristiques ;
- résoudre une équation différentielle d'ordre 1 ;

Difficulté : ● ○ ○

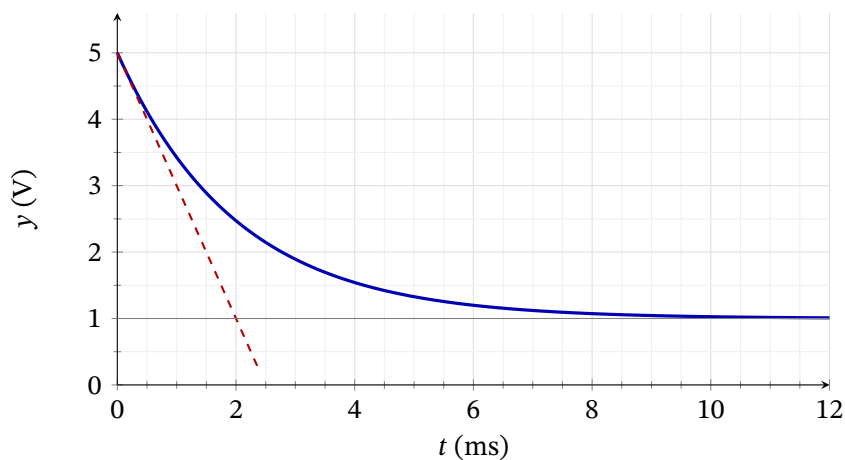
A. Prévoir avant de calculer

On considère $\dot{u} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec $\tau > 0$ et $E > 0$.

- A1.** Sans résoudre, déterminer la valeur de u lorsque le régime permanent est atteint.
- A2.** Sans résoudre, déterminer la pente $u'(0)$ à l'instant initial en fonction de $u(0)$.
- A3.** Sur un même graphe, esquisser l'allure de $u(t)$ pour $u(0) = 0$, $u(0) = E$ et $u(0) = 2E$.
- A4.** Vérifier ensuite ces prévisions à l'aide de la solution analytique.

B. Du graphe à l'équation

La courbe ci-dessous représente une tension $y(t)$ solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et second membre constant. La tangente à l'origine est tracée en pointillés.



- B1.** Lire $y(0)$ et la valeur finale y_∞ .
- B2.** Déterminer la constante de temps τ par deux méthodes : (i) intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote ; (ii) instant où $y - y_\infty$ vaut 37 % de sa valeur initiale.
- B3.** En déduire l'équation différentielle vérifiée par y (forme canonique, valeurs numériques).
- B4.** Écrire $y(t)$, puis vérifier la cohérence en calculant $y(4 \text{ ms})$ et en le comparant au graphe.

C. Situation physique : refroidissement d'un café

Un café à $T_0 = 80^\circ\text{C}$ est posé dans une pièce à $T_{\text{ext}} = 20^\circ\text{C}$. Sa température vérifie la loi de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T - T_{\text{ext}}}{\tau} \text{ avec } \tau = 10 \text{ min.}$$



- C1.** Caractériser l'équation (linéarité, ordre, coefficients, second membre) et la mettre sous forme canonique.
- C2.** Prévoir la température finale et esquisser $T(t)$ avant tout calcul.
- C3.** Résoudre, puis déterminer l'instant où le café atteint 50°C . Commenter : que représente cette durée par rapport à τ ?
- C4.** Que se passerait-il si le café était sorti d'un réfrigérateur à 5°C ? Répondre d'abord sans calcul.

D. Analyse d'erreur

Un étudiant résout $\tau \dot{i} + i = c$ avec $i(0) = -c$ et rédige :

« Solution homogène : $i_h = \lambda e^{-t/\tau}$. Or $i_h(0) = -c$, donc $\lambda = -c$. Solution particulière : $i_p = c$.
Donc $i(t) = c - c e^{-t/\tau}$. »

- D1.** Sans refaire le calcul, montrer que ce résultat est faux (tester par exemple pour une valeur particulière de t).
- D2.** Identifier l'erreur de méthode et corriger.

Corrigé

- A.** A1 : $u_\infty = E$. A2 : $u'(0) = \frac{E - u(0)}{\tau}$: pente positive si $u(0) < E$, nulle si $u(0) = E$ (la solution reste constante), négative si $u(0) > E$. A4 : $u(t) = E + (u(0) - E)e^{-t/\tau}$.
- B.** $y(0) = 5\text{ V}$, $y_\infty = 1\text{ V}$, $\tau = 2\text{ ms}$ (à $t = \tau$: $y \approx 1 + 4 \times 0,37 \approx 2,5\text{ V}$). Équation : $y' + \frac{y}{\tau} = \frac{y_\infty}{\tau}$ soit $\tau y' + y = 1\text{ V}$. $y(t) = 1 + 4e^{-t/\tau}$ (V, ms); $y(4\text{ ms}) = 1 + 4e^{-2} \approx 1,54\text{ V}$.
- C.** Linéaire, ordre 1, coefficients constants, second membre constant : $T' + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{\text{ext}}}{\tau}$, donc $T_\infty = T_{\text{ext}} = 20^\circ\text{C}$. $T(t) = 20 + 60e^{-t/\tau}$ ($^\circ\text{C}$, min). $T = 50^\circ\text{C}$ pour $e^{-t/\tau} = 1/2$, soit $t = \tau \ln 2 \approx 6,9\text{ min}$: c'est le temps de « demi-écart », indépendant de T_0 . Café à 5°C : même τ , même valeur finale, mais la température croît : $T(t) = 20 - 15e^{-t/\tau}$.
- D.** D1 : $i(0) = c - c = 0 \neq -c$. D2 : λ a été déterminé sur i_h seule ; il faut l'appliquer à la solution complète : $i(0) = \lambda + c = -c$ donc $\lambda = -2c$ et $i(t) = c(1 - 2e^{-t/\tau})$.

Exercice 3 : condition initiale

Savoir-faire

- utiliser les données et la continuité pour en déduire les conditions initiales ;
- utiliser des schémas équivalents pour déterminer des grandeurs en régime permanent.

Difficulté : ● ○ ○

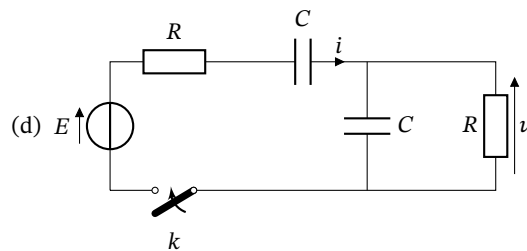
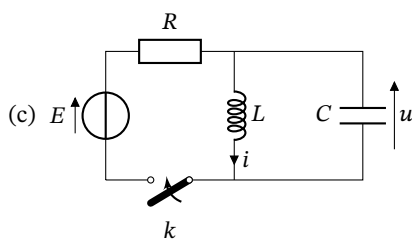
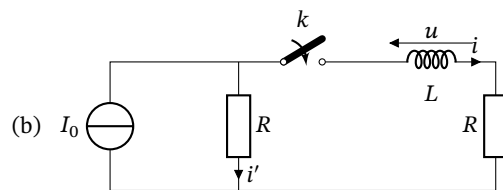
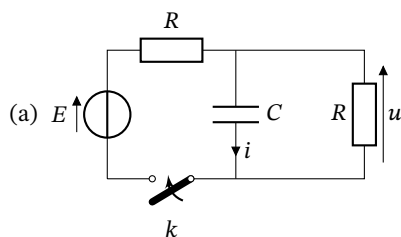
Dans chacun des circuits ci-dessous, l'interrupteur k est ouvert depuis longtemps et on le ferme à l'instant $t = 0$. On suppose qu'à $t = 0^-$ tous les condensateurs sont déchargés et qu'aucune bobine n'est parcourue



2026-2027

par un courant.

- 1 Rappeler quelle grandeur électrique est nécessairement continue pour un condensateur, puis pour une bobine.
- 2 Par quel dipôle simple peut-on remplacer un condensateur en régime permanent continu ? une bobine ?
- 3 Pour chaque circuit, dessiner le schéma équivalent à $t = 0^+$, puis en régime permanent ($t \rightarrow \infty$). En déduire les grandeurs u , i et i' lorsqu'elles sont présentes. Présenter les résultats dans un tableau à trois colonnes : $t = 0^-$, $t = 0^+$, $t \rightarrow \infty$.
- 4 Parmi les grandeurs du tableau, lesquelles sont discontinues en $t = 0$? Est-ce en contradiction avec la question 1 ?



Corrigé

- 1 La tension u_C aux bornes d'un condensateur est continue. De même, l'intensité i_L traversant une bobine est continue.
- 2 En régime permanent continu, $i = C du_C/dt = 0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. De même, $u = L di_L/dt = 0$: la bobine se comporte comme un fil.
- 3

Méthode

À $t = 0^+$: on utilise les théorèmes de continuité.

- Pour un condensateur, si $u_C(0^+) = 0$, alors on remplace le condensateur par un **fil** ;
- Pour une bobine, si $i_L(0^+) = 0$, alors on remplace la bobine par un **interrupteur ouvert** ;



Circuit	$t = 0^-$	$t = 0^+$	$t \rightarrow \infty$
(a)	$u = 0, i = 0$	$u = 0, i = E/R$	$u = E/2, i = 0$
(b)	$u = 0, i = 0, i' = I_0$	$u = RI_0, i = 0, i' = I_0$	$u = 0, i = i' = I_0/2$
(c)	$u = 0, i = 0$	$u = 0, i = 0$	$u = 0, i = E/R$
(d)	$u = 0, i = 0$	$u = 0, i = E/R$	$u = 0, i = 0$

(a) À 0^+ , le condensateur (fil) court-circuite la résistance de droite : $u = 0$ et tout le courant E/R passe dans C .

En régime permanent, C est un interrupteur ouvert ; les deux résistances forment un diviseur de tension : $u = E/2$.

(b) À l'instant initial. Avant fermeture, tout le courant I_0 traverse la résistance du milieu. À 0^+ , i reste nul (continuité) donc $i' = I_0$ (loi des noeuds). La loi des mailles dans la maille de droite donne $Ri' = u + R \cdot 0$, soit $u = RI_0$.

En régime permanent, la bobine est un fil : deux résistances égales en parallèle se partagent I_0 .

(c) À 0^+ : $u = 0$ (continuité pour un condensateur) et $i = 0$ (continuité pour une bobine). Le courant dans le branchement du générateur (loi des mailles) est $i_E = E/R$. Le courant i_E passe entièrement dans le condensateur (la bobine est un interrupteur ouvert).

En régime permanent, la bobine (fil) court-circuite le condensateur : $u = 0$ et $i = E/R$.

(d) À 0^+ , les deux condensateurs sont des fils : celui du bas court-circuite la résistance de droite, $u = 0$ et $i = E/R$ (loi des mailles).

En régime permanent, le condensateur du haut bloque tout courant : $i = 0$ et $u = 0$.

Attention piège. En (d), u est nulle au début et à la fin, mais pas entre les deux : le condensateur du bas se charge (un courant traverse la résistance de droite), puis se décharge quand celui du haut bloque le courant. Les valeurs extrêmes ne décrivent pas toute l'évolution (le circuit est d'ordre 2).

- 4 Sont discontinus : i en (a), u en (b), le courant dans C en (c), i en (d). Aucune contradiction : seules u_C et i_L sont tenues d'être continues. Les courants dans les condensateurs, les tensions aux bornes des bobines et les grandeurs relatives aux résistances peuvent sauter.

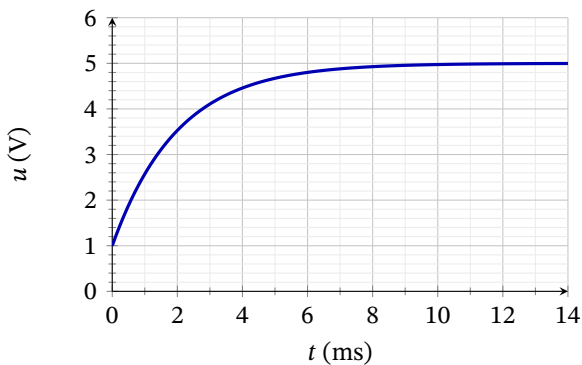
Exercice 4 : constante de temps

Savoir-faire

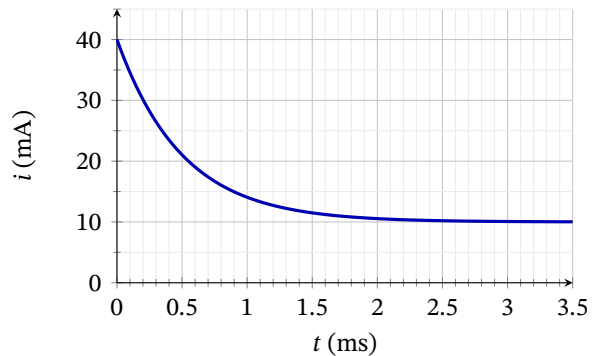
Difficulté : ● ○ ○

- interpréter un graphe ;
- interpréter le rôle de la constante de temps τ ;

Les deux graphes ci-dessous représentent la réponse de deux circuits du premier ordre après une commutation à $t = 0$.



Signal 1



Signal 2

- 1 Relever, pour chaque signal, la valeur initiale et la valeur en régime permanent.
- 2 Déterminer la constante de temps τ par la méthode de la tangente à l'origine.
- 3 Vérifier ce résultat par une seconde méthode, en calculant la valeur prise par le signal à l'instant $t = \tau$. Quel pourcentage de la variation totale a alors été parcouru ?
- 4 Au bout de combien de temps (en multiple de τ) peut-on considérer le régime permanent atteint à 1 % près ?

Corrigé

	Valeur initiale	Régime permanent	τ	Valeur à $t = \tau$
Signal 1	1 V	5 V	2,0 ms	$1 + 0,63 \times 4 \approx 3,5$ V
Signal 2	40 mA	10 mA	0,50 ms	$10 + 0,37 \times 30 \approx 21$ mA

Méthode

Tangente à l'origine : elle coupe l'asymptote horizontale (valeur finale) à l'abscisse $t = \tau$. **Valeur à τ :** pour $s(t) = s_{\infty} + (s_0 - s_{\infty})e^{-t/\tau}$, on a $s(\tau) = s_{\infty} + 0,37(s_0 - s_{\infty})$: 63 % de la variation totale est parcourue. La seconde méthode est plus précise (tracer une tangente est imprécis).

- 4 $e^{-t/\tau} = 0,01$ donne $t = \tau \ln 100 \approx 4,6 \tau$; on retient usuellement 5τ (écart résiduel 0,7 %).

Exercice 5 : vrai ou faux

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis *justifier* en une ou deux phrases (relation courant-tension, exemple ou contre-exemple).

- 1 Le courant qui traverse un condensateur est une fonction continue du temps.
- 2 En régime permanent continu, une bobine idéale se comporte comme un interrupteur ouvert.
- 3 Pour un circuit comportant un seul condensateur, la constante de temps vaut toujours RC , où R est la résistance branchée à côté du condensateur.
- 4 Au bout d'une durée τ , le régime permanent est atteint.



- 5 Dans un circuit RC série, plus la résistance est grande, plus le condensateur se charge vite.
- 6 La tension aux bornes d'une bobine peut être discontinue.

Corrigé

- 1 **Faux.** C'est la *tension* qui est continue; $i = C du_C/dt$ peut sauter.
- 2 **Faux.** $u = L di/dt \rightarrow 0$: elle se comporte comme un *fil*.
- 3 **Faux.** $\tau = R_{eq}C$, où R_{eq} est la résistance vue par le condensateur, sources éteintes. Contre-exemple : exercice 6, où $\tau = RC/3$.
- 4 **Faux.** À $t = \tau$, seuls 63 % de la variation sont effectués; il faut environ 5τ pour atteindre le régime permanent.
- 5 **Faux.** $\tau = RC$ augmente avec R : le courant de charge, limité par R , est plus faible, donc la charge est plus lente.
- 6 **Vrai.** $u_L = L di/dt$ peut sauter; seul i est continu.

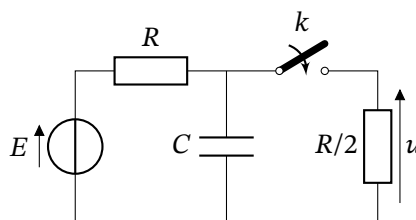
Exercice 6 : étude d'un circuit RC

Savoir-faire

- ⚙ interpréter un graphique du 1er ordre;
- ⚙ déterminer une équation différentielle;
- ⚙ déterminer les conditions initiales;
- ⚙ résoudre une équation différentielle
- ⚙ confronter théorie et graphique.

Difficulté : ● ● ○

On étudie le circuit de la figure ci-dessous. L'interrupteur k est ouvert depuis longtemps; on le ferme à l'instant $t = 0$.



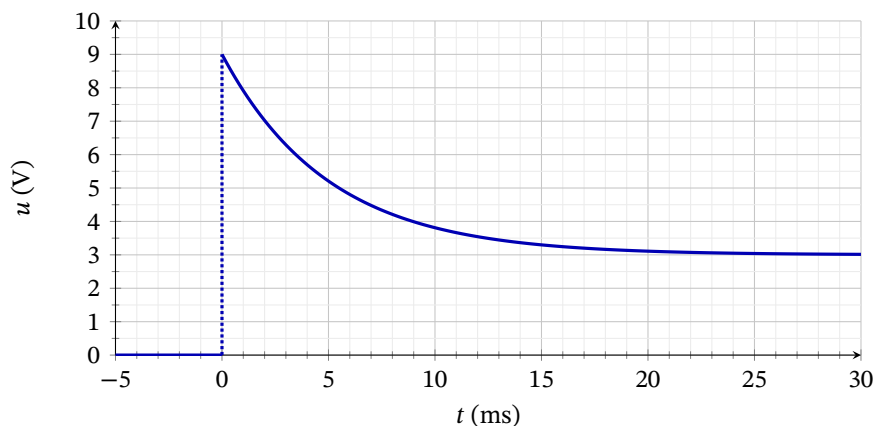
- 1 Le condensateur est-il chargé avant la fermeture de k ? Déterminer $u(t = 0^-)$ puis $u(t = 0^+)$.
- 2 En utilisant les équivalents en régime permanent, déterminer $U_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$.
- 3 Sans calcul supplémentaire, esquisser l'allure attendue de $u(t)$.
- 4 Montrer que, pour $t > 0$, la tension u vérifie l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau}$$



où l'on exprimera τ en fonction de R et C .

- 5 Résoudre cette équation et exprimer $u(t)$.
- 6 Interprétation : « éteindre » la source (la remplacer par un fil) et calculer la résistance équivalente R_{eq} vue par le condensateur. Comparer $R_{\text{eq}}C$ et τ .
- 7 On donne $R = 10 \text{ k}\Omega$. À l'aide du graphique de la figure ci-après, déterminer E et la capacité C du condensateur.



Corrigé

- 1 L'interrupteur ne coupe pas la maille $E-R-C$: avant la fermeture, le condensateur s'est chargé et, en régime permanent, $u_C(0^-) = E$. Aucun courant ne traverse $R/2$: $u(0^-) = 0$. Après fermeture, $R/2$ est en parallèle sur C : $u = u_C$, et par continuité $U_0 = u(0^+) = E$.

Attention. u est discontinue ($0 \rightarrow E$), alors que u_C est continue : u n'est égale à u_C qu'après la fermeture.

- 2 En régime permanent, C est un interrupteur ouvert : diviseur de tension, $U_\infty = E \frac{R/2}{R + R/2} = \frac{E}{3}$.
- 3 Décroissance exponentielle de E vers $E/3$, à tangente initiale de pente négative.
- 4 Loi des nœuds au point commun à R , C et $R/2$, avec $u = u_C$:

$$\frac{E - u}{R} = C \frac{du}{dt} + \frac{2u}{R} \implies \frac{du}{dt} + \frac{3u}{RC} = \frac{E}{RC} \implies \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau}, \quad \tau = \frac{RC}{3}.$$

- 5 Solution particulière $E/3$, solution homogène $Ae^{-t/\tau}$; la condition initiale $u(0^+) = E$ donne $A = 2E/3$:

$$u(t) = \frac{E}{3} + \frac{2E}{3} e^{-t/\tau}.$$

- 6 Source éteinte, le condensateur voit R et $R/2$ en parallèle : $R_{\text{eq}} = \frac{R \cdot R/2}{R + R/2} = \frac{R}{3}$, d'où $R_{\text{eq}}C = \tau$.

Savoir

Pour un circuit ne contenant qu'un condensateur (ou une bobine), $\tau = R_{\text{eq}}C$ (ou $\tau = L/R_{\text{eq}}$), avec R_{eq} la résistance vue par le dipôle, les sources étant éteintes (source de tension $\rightarrow$ fil, source de courant $\rightarrow$ interrupteur ouvert). C'est un excellent moyen de contrôler une équation différentielle.

- 7 Graphiquement : $u(0^+) = 9 \text{ V} = E$ et $U_\infty = 3 \text{ V} = E/3$ (cohérent). À $t = \tau$: $u = 3 + 0,37 \times 6 \approx 5,2 \text{ V}$,



atteint pour $\tau \approx 5 \text{ ms}$. Donc

$$C = \frac{3\tau}{R} = \frac{3 \times 5 \times 10^{-3}}{1 \times 10^4} = 1,5 \mu\text{F}.$$

Attention : utiliser $\tau = RC$ conduit à $C = 0,5 \mu\text{F}$: erreur d'un facteur 3.

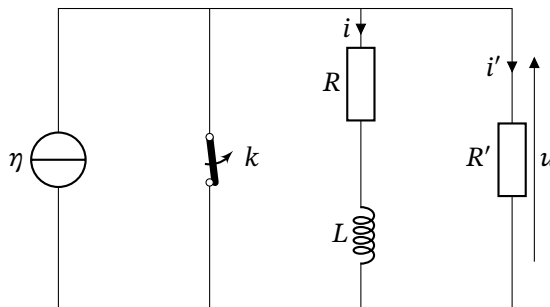
Exercice 7 : réponse à un échelon de courant

Savoir-faire

- ⚙ interpréter un graphique du 1er ordre;
- ⚙ déterminer une équation différentielle;
- ⚙ déterminer les conditions initiales;
- ⚙ résoudre une équation différentielle
- ⚙ confronter théorie et graphique.

Difficulté : ● ● ○

On étudie le circuit de la figure ci-dessous. L'interrupteur k est fermé depuis longtemps : il court-circuite la source idéale de courant. À l'instant $t = 0$, on l'ouvre : le reste du circuit reçoit alors brusquement le courant η . La tension u et le courant i' sont orientés en convention récepteur.



- 1 Pourquoi ne pourrait-on pas modéliser la mise sous tension en plaçant un interrupteur ouvert *en série* avec la source idéale de courant ?
- 2 Déterminer les courants i et i' ainsi que la tension u juste après l'ouverture de l'interrupteur k .
- 3 Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$. Identifier la constante de temps τ .
- 4 Déterminer l'évolution du courant $i(t)$. Vérifier la valeur finale à l'aide du schéma équivalent en régime permanent.
- 5 En déduire $i'(t)$ ainsi que $u(t)$.
- 6 Tracer les courbes $i(t)$ et $u(t)$ en faisant apparaître valeurs initiales, asymptotes et τ . Commenter.

Corrigé

- 1 Une source idéale de courant impose η quelle que soit la tension à ses bornes. En série avec un interrupteur ouvert, le courant serait à la fois nul et égal à η : le modèle est incohérent (physiquement, la tension aux bornes de la source réelle tendrait vers de très grandes valeurs).



2026-2027

- 2 Pour $t < 0$, tout le circuit à droite de k est court-circuité : $i = i' = 0, u = 0$. À 0^+ , i traverse la bobine donc $i(0^+) = 0$; la loi des nœuds donne $i'(0^+) = \eta$ et $u(0^+) = R'\eta$.

- 3 Maille $R, L, R' : R'i' = Ri + L\frac{di}{dt}$ avec $i' = \eta - i$, d'où

$$L\frac{di}{dt} + (R + R')i = R'\eta, \quad \tau = \frac{L}{R + R'}.$$

Contrôle : source de courant éteinte (interrupteur ouvert), la bobine voit R en série avec $R' : \tau = L/(R + R')$.

- 4 Avec $i(0^+) = 0$:

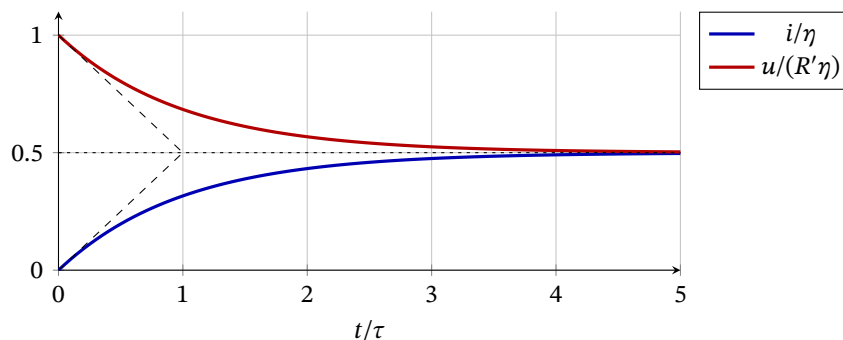
$$i(t) = \frac{R'\eta}{R + R'} (1 - e^{-t/\tau}).$$

En régime permanent, la bobine est un fil : diviseur de courant, $i_\infty = \eta R'/(R + R')$: cohérent.

5

$$i'(t) = \eta - i(t) = \frac{\eta}{R + R'} (R + R'e^{-t/\tau}), \quad u(t) = R'i'(t) = \frac{R'\eta}{R + R'} (R + R'e^{-t/\tau}).$$

- 6 Tracé en grandeurs réduites, dans le cas particulier $R = R'$ (i croît de 0 à $\eta/2$; u décroît de $R'\eta$ à $R'\eta/2$) :



Exercice 8 : résistance apparente

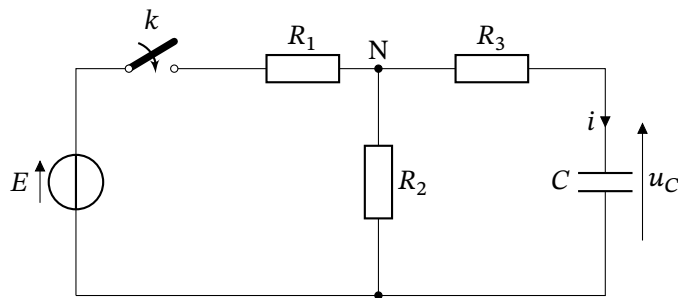
Savoir-faire

- interpréter un graphique du 1er ordre;
- déterminer une équation différentielle;
- déterminer les conditions initiales;
- résoudre une équation différentielle
- confronter théorie et graphique.

Difficulté : ● ● ○

Dans le circuit ci-dessous, le condensateur est initialement déchargé; on ferme k à $t = 0$.
On donne $E = 10 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \mu\text{F}$.





- 1 Déterminer $u_C(0^+)$, $i(0^+)$ et $u_C(\infty)$ à l'aide des schémas équivalents.
- 2 Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C .
- 3 En déduire τ et vérifier que $\tau = R_{\text{eq}}C$, où R_{eq} est la résistance vue par le condensateur lorsque la source est éteinte.
- 4 Faire l'application numérique et donner $u_C(t)$.
- 5 La constante de temps dépend-elle de E ? Expliquer physiquement.

Corrigé

- 1 À 0^+ : $u_C(0^+) = 0$ (continuité), C se comporte comme un fil et R_3 est en parallèle avec R_2 . En régime permanent, $i = 0$: diviseur de tension, $u_C(\infty) = E R_2 / (R_1 + R_2) = E/2 = 5 \text{ V}$. Pour $i(0^+)$: $R_2 \parallel R_3 = 0,667 \text{ k}\Omega$, $V_N = E \cdot \frac{0,667}{2 + 0,667} = 2,5 \text{ V}$, d'où $i(0^+) = V_N / R_3 = 2,5 \text{ mA}$.
- 2 Même résultat par la loi des nœuds en N, en éliminant $V_N = u_C + R_3 i$:

$$R_{\text{th}} C \frac{du_C}{dt} + u_C = E_{\text{th}} \quad \text{avec} \quad R_{\text{th}} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad E_{\text{th}} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- 3 $\tau = R_{\text{th}} C$, et R_{th} est bien la résistance vue par C lorsque E est remplacée par un fil. Remarque : cette méthode ne permet pas de prédire E_{th} , mais avec un schéma équivalent en régime permanent continu, $i(\infty) = 0$, et un pont diviseur de tension donne : $E_{\text{th}} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.
- 4 $R_{\text{th}} = 1 + 1 = 2,0 \text{ k}\Omega$, $\tau = 20 \text{ ms}$, $E_{\text{th}} = 5 \text{ V}$: $u_C(t) = 5(1 - e^{-t/\tau})$ (en volts). Vérification : $i(0^+) = E_{\text{th}} / R_{\text{th}} = 2,5 \text{ mA}$.
- 5 τ caractérise la manière dont le circuit « oublie » un écart à l'équilibre, ce qui ne dépend que des éléments passifs. La source ne fixe que la valeur finale (le second membre de l'équation).

Exercice 9 : décharge d'un condensateur dans un autre condensateur

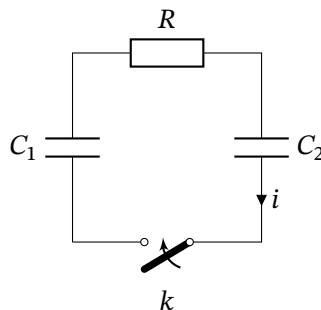
Savoir-faire

- ⚙ interpréter un graphique du 1er ordre ;
- ⚙ déterminer une équation différentielle ;
- ⚙ déterminer les conditions initiales ;
- ⚙ résoudre une équation différentielle
- ⚙ confronter théorie et graphique.

Difficulté : ● ● ○



On considère le circuit de la figure ci-dessous. Le condensateur de capacité C_1 porte la charge $q_0 > 0$ sur l'armature du haut ; celui de capacité C_2 est déchargé. À l'instant initial, on ferme l'interrupteur.



- 1 Déterminer $i(0^+)$.
- 2 Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ pour $t \geq 0$. Interpréter la constante de temps obtenue.
- 3 Déterminer la solution de cette équation différentielle.
- 4 Quelles sont les charges des deux condensateurs au bout d'un temps très long ? Commenter en termes de conservation de la charge.

Corrigé

On note q_1 et q_2 les charges des armatures du haut. Avec l'orientation choisie : $\frac{dq_2}{dt} = i$ (le courant arrive sur l'armature du haut) et $\frac{dq_1}{dt} = -i$ (le courant part de l'armature du haut). La loi des mailles : $\frac{q_1}{C_1} = Ri + \frac{q_2}{C_2}$.

- 1 À 0^+ , $q_1 = q_0$ et $q_2 = 0$ (continuité) : $i(0^+) = \frac{q_0}{RC_1}$. Il n'y a pas de bobine dans la branche, le courant peut-être discontinu.
- 2 En dérivant la loi des mailles :

$$R \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i = 0, \quad \tau = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

$\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ est la capacité équivalente aux deux condensateurs en série : R « voit » cette capacité.

- 3 $i(t) = \frac{q_0}{RC_1} e^{-t/\tau}$.
- 4 $q_2(\infty) = \int_0^\infty i dt = \frac{q_0}{RC_1} \tau = q_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}$, et $q_1(\infty) = q_0 - q_2(\infty) = q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$. La charge totale $q_1 + q_2 = q_0$ est conservée (les armatures du haut forment, avec le fil et R , un conducteur isolé). L'état final vérifie $u_1 = u_2$: le courant s'annule quand les deux tensions sont égales.

Exercice 10 : surtension

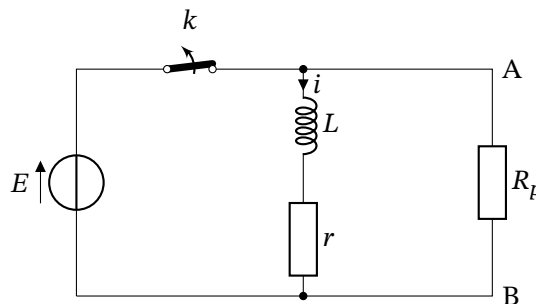


Savoir-faire

- ⚙️ déterminer une équation différentielle;
- ⚙️ déterminer les conditions initiales;
- ⚙️ résoudre une équation différentielle
- ⚙️ aspect énergétique des circuits du premier ordre (chapitre E4)

Difficulté : ● ● ●

La bobine d'un relais est modélisée par une inductance $L = 0,20 \text{ H}$ en série avec une résistance $r = 4,0 \Omega$. Elle est alimentée sous $E = 12 \text{ V}$ par l'interrupteur k , fermé depuis longtemps. Une résistance R_p est placée en parallèle sur la bobine. À $t = 0$, on ouvre k . On note $u = V_A - V_B$.



Savoir

Énergie emmagasinée dans une bobine : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} Li(t)^2$

Puissance dissipée par effet *Joule* au travers d'une résistance : $\mathcal{E}_R = Ri(t)^2$

Relation puissance énergie : $d\mathcal{E} = P(t)dt$ où $\mathcal{E} = \int_0^{t_f} P(t)dt$

- 1 Déterminer $i(0^-)$ et $u(0^-)$.
- 2 Déterminer $i(0^+)$ et $u(0^+)$. Application numérique pour $R_p = 1,0 \text{ k}\Omega$. Commenter.
- 3 Établir l'équation différentielle vérifiée par i pour $t > 0$ et en déduire $i(t)$ et $u(t)$. Calculer τ .
- 4 Quelle énergie est dissipée après l'ouverture ? Dans quel dipôle principalement ?
- 5 On remplace R_p par une résistance de protection $R_d = 10 \Omega$. Calculer la nouvelle valeur de $u(0^+)$ et la nouvelle constante de temps. Quel compromis apparaît ?
- 6 (Culture technique) En pratique, on place une diode « de roue libre » en parallèle sur la bobine. Expliquer qualitativement son rôle.

Corrigé

- 1 Régime permanent, bobine = fil de résistance r : $i(0^-) = E/r = 3,0 \text{ A}$ et $u(0^-) = E = 12 \text{ V}$.
- 2 Continuité de i : $i(0^+) = 3,0 \text{ A}$. Ce courant ne peut plus passer que par R_p , de B vers A : $u(0^+) = -R_p \frac{E}{r} = -3000 \text{ V}$.



2026-2027

La tension passe de 12 V à -3 kV : c'est l'origine des étincelles aux contacts des interrupteurs et du principe de la bobine d'allumage.

- 3 Maille L, r, R_p : $L \frac{di}{dt} + (r + R_p) i = 0$, d'où

$$i(t) = \frac{E}{r} e^{-t/\tau}, \quad u(t) = -R_p \frac{E}{r} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{r + R_p} \approx 0,20 \text{ ms.}$$

- 4 L'énergie initialement stockée, $\frac{1}{2} Li_0^2 = 0,90 \text{ J}$, est entièrement dissipée.

La fraction $R_p/(R_p + r) \approx 99,6\%$ l'est dans R_p .

- 5 $u(0^+) = -R_d E/r = -30 \text{ V}$ et $\tau = L/(r + R_d) \approx 14 \text{ ms}$. Compromis : une surtension faible impose une extinction lente du courant (le relais retombe plus lentement), et réciproquement. L'énergie à dissiper, elle, est la même.

- 6 La diode est bloquée tant que k est fermé. À l'ouverture, elle devient passante et offre un chemin au courant de la bobine : u est limitée à environ $-0,7 \text{ V}$, et l'énergie est dissipée dans r et la diode.

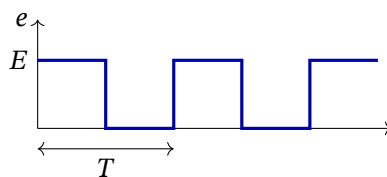
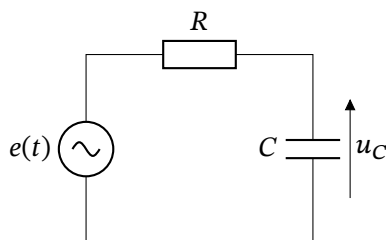
Exercice 11 : réponse à un créneau

Savoir-faire

- ⚙️ déterminer une équation différentielle par morceau ;
- ⚙️ déterminer les conditions initiales ;
- ⚙️ résoudre une équation différentielle par morceau et raccorder les solutions ;

Difficulté : ● ● ●

Un GBF délivre une tension créneau $e(t)$ de période T , valant E pendant une demi-période et 0 pendant l'autre, aux bornes d'un circuit RC série. On observe $u_C(t)$ à l'oscilloscope. On donne $R = 1,0 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$, $E = 5,0 \text{ V}$.



- 1 Calculer τ . Sans calcul, prévoir l'allure de $u_C(t)$ lorsque $T/2 = 10\tau$, puis lorsque $T/2 = \tau/10$. Justifier.
- 2 Cas $T/2 \gg \tau$: tracer $u_C(t)$ sur deux périodes. Quelle fréquence maximale doit-on choisir au GBF pour observer une charge complète à 1 % près ?
- 3 Cas $T/2 \ll \tau$: en régime établi, u_C oscille entre deux valeurs voisines. Autour de quelle valeur ? En assimilant les portions d'exponentielle à des segments de droite, montrer que l'amplitude crête à crête vaut $\Delta u \approx \frac{ET}{4\tau}$. Application numérique pour $f = 50 \text{ kHz}$.

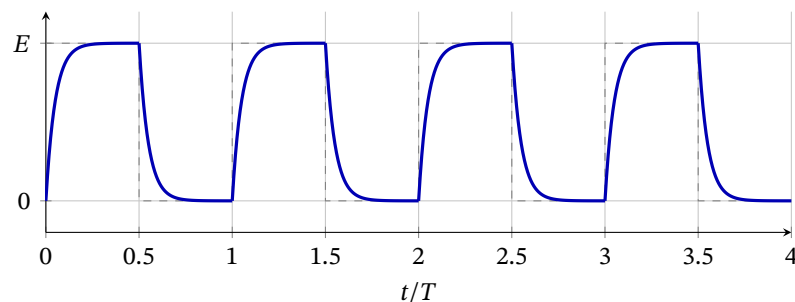




- 4 (Pour aller plus loin) En notant U_1 et U_2 les valeurs minimale et maximale de u_C en régime établi et $a = T/(2\tau)$, montrer que $U_2 = \frac{E}{1 + e^{-a}}$ et retrouver le résultat précédent.

✎ Corrigé

- 1 $\tau = RC = 0,10 \text{ ms}$. Si $T/2 = 10\tau$, le condensateur a le temps de se charger et de se décharger complètement à chaque demi-période : on observe des arcs d'exponentielle complets. Si $T/2 = \tau/10$, le condensateur n'a le temps de faire qu'une infime partie de chaque évolution : u_C reste presque constante, avec de petites oscillations en « dents de scie ».
- 2 On veut $T/2 \geq 5\tau$, soit $T \geq 1,0 \text{ ms}$ et $f \leq 1 \text{ kHz}$.



$u_C(t)$ pour $T/2 = 10\tau$ (créneau $e(t)$ en pointillés)

- 3 En régime établi, les phases de charge et de décharge sont symétriques : u_C oscille autour de $E/2$ (valeur moyenne de e). Pendant une phase de charge, $\frac{du_C}{dt} = \frac{E - u_C}{\tau} \approx \frac{E - E/2}{\tau} = \frac{E}{2\tau}$ pendant $T/2$, soit

$$\Delta u \approx \frac{E}{2\tau} \cdot \frac{T}{2} = \frac{ET}{4\tau}.$$

Pour $f = 50 \text{ kHz}$: $T = 20 \mu\text{s}$, $\Delta u \approx \frac{5 \times 20}{4 \times 100} = 0,25 \text{ V}$ autour de $2,5 \text{ V}$.

- 4 Charge de U_1 à U_2 : $U_2 = E + (U_1 - E)e^{-a}$; décharge de U_2 à U_1 : $U_1 = U_2 e^{-a}$. En éliminant U_1 : $U_2(1 - e^{-2a}) = E(1 - e^{-a})$, d'où $U_2 = \frac{E}{1 + e^{-a}}$ et $U_1 = \frac{E e^{-a}}{1 + e^{-a}}$. Pour $a \ll 1$: $U_2 - U_1 = E \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}} \approx E \frac{a}{2} = \frac{ET}{4\tau}$. On retrouve le résultat de la question 3.

🕒 Éléments de réponse

3. Utiliser les lois de continuités.