

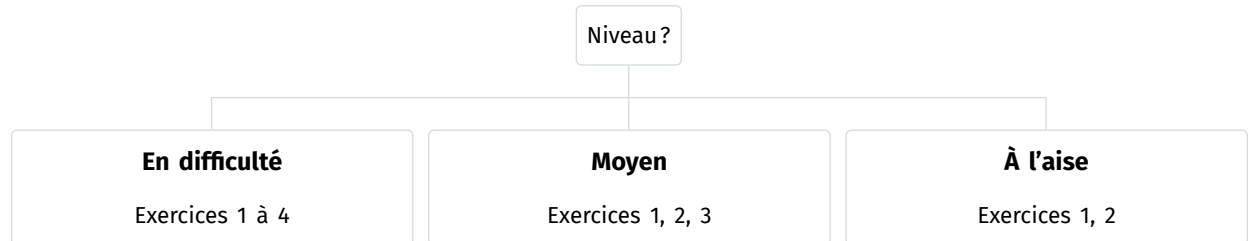


TD E2 | Électrocinétique

Circuits du premier ordre



Difficulté croissante au long de la fiche. Consigne : rédiger au propre, faire figurer les unités à chaque étape.



Exercices complémentaires disponibles dans le cahier d'entraînement : **4.7** à **4.15**



QR vers le cahier

Exercice 1 : équation différentielle 1/2

Savoir-faire

- reconnaître une équation différentielle, et ses caractéristiques ;
- résoudre une équation différentielle d'ordre 1 ;

Difficulté : ● ○ ○



Méthode

[breakable] **Cadre de ce que l'on sait faire** : équation différentielle linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre nul ou constant.

1. Mettre sous forme canonique :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{y_{\infty}}{\tau} \quad \text{avec } \tau \text{ (en s) et } y_{\infty} \text{ (unité de } y) \text{ constants.}$$

Identifier τ et y_{∞} et vérifier leurs unités.

2. Solution de l'équation homogène $\frac{dy_h}{dt} + \frac{y_h}{\tau} = 0$: $y_h(t) = \lambda e^{-t/\tau}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Solution particulière de la forme du second membre (constante) : $y_p' = 0$ donc $y_p = y_{\infty}$.

4. Solution générale : $y(t) = \lambda e^{-t/\tau} + y_{\infty}$.

5. Condition initiale sur la solution complète : $y(0) = \lambda + y_{\infty} = y_0$ donc $\lambda = y_0 - y_{\infty}$:

$$y(t) = y_{\infty} + (y_0 - y_{\infty}) e^{-t/\tau}$$

6. Vérifier : $y(0) = y_0$? $\lim_{t \rightarrow \infty} y = y_{\infty}$ si $\tau > 0$? Homogénéité ? L'allure est-elle cohérente avec la situation ?

Les fonctions x, y, u, v, i, θ, T et N dépendent du temps t . Les grandeurs $a, m, g, k, E, \tau, \omega, \omega_0, Q, X_0$ et T_{ext} sont des constantes strictement positives.

a) $\tau \dot{u} + u = E$

b) $\dot{y} = 3 - 2y$

c) $m \dot{v} = mg - kv^2$

d) $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$

e) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

f) $t \dot{y} + y = 0$

g) $\dot{u} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau} \cos(\omega t)$

h) $y \dot{y} = 1$

i) $\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}$

j) $\frac{dT}{dt} = \frac{T_{\text{ext}} - T}{\tau}$

k) $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0$

l) $\dot{y} = y + t$

- 1 Reproduire et compléter le tableau suivant (L = linéaire, NL = non linéaire ; pour le second membre : nul, constant, ou préciser sa forme). Pour chaque équation non linéaire, souligner le terme responsable.



Équation	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
L / NL												
Ordre												
Coeff. const. ?												
Second membre												

- 2 Parmi ces équations, lesquelles relèvent de la méthode vue en cours ? Pour chacune des autres, indiquer en une phrase *pourquoi* la méthode ne s'applique pas.
- 3 Pour les équations retenues, écrire la forme canonique, identifier τ et y_∞ (avec leur unité quand c'est possible), puis résoudre avec les conditions initiales :

a) $u(0) = 0$ b) $y(0) = 0$ i) $N(0) = N_0$ j) $T(0) = T_0$

Exercice 2 : équation différentielle 2/2

Savoir-faire

- reconnaitre une équation différentielle, et ses caractéristiques ;
- résoudre une équation différentielle d'ordre 1 ;

Difficulté : ● ○ ○

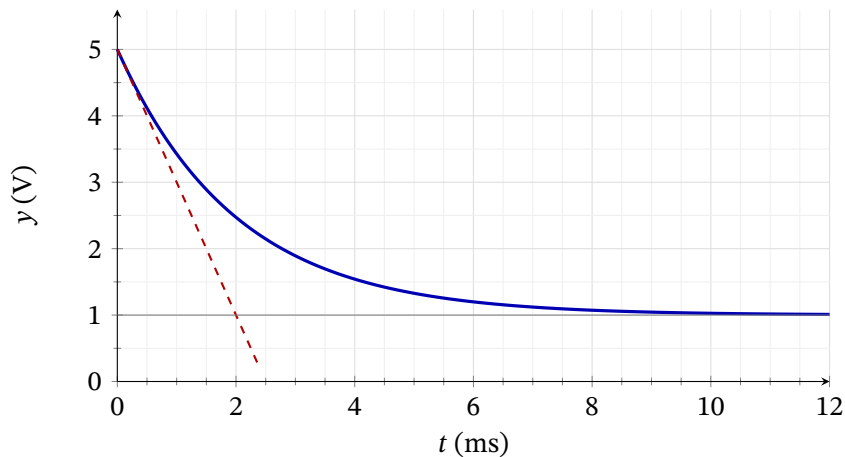
A. Prévoir avant de calculer

On considère $\dot{u} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec $\tau > 0$ et $E > 0$.

- A1.** Sans résoudre, déterminer la valeur de u lorsque le régime permanent est atteint.
- A2.** Sans résoudre, déterminer la pente $u'(0)$ à l'instant initial en fonction de $u(0)$.
- A3.** Sur un même graphe, esquisser l'allure de $u(t)$ pour $u(0) = 0$, $u(0) = E$ et $u(0) = 2E$.
- A4.** Vérifier ensuite ces prévisions à l'aide de la solution analytique.

B. Du graphe à l'équation

La courbe ci-dessous représente une tension $y(t)$ solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et second membre constant. La tangente à l'origine est tracée en pointillés.



- B1.** Lire $y(0)$ et la valeur finale y_{∞} .
- B2.** Déterminer la constante de temps τ par deux méthodes : (i) intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote ; (ii) instant où $y - y_{\infty}$ vaut 37 % de sa valeur initiale.
- B3.** En déduire l'équation différentielle vérifiée par y (forme canonique, valeurs numériques).
- B4.** Écrire $y(t)$, puis vérifier la cohérence en calculant $y(4 \text{ ms})$ et en le comparant au graphe.

C. Situation physique : refroidissement d'un café

Un café à $T_0 = 80^\circ\text{C}$ est posé dans une pièce à $T_{\text{ext}} = 20^\circ\text{C}$. Sa température vérifie la loi de Newton : $\frac{dT}{dt} = -\frac{T - T_{\text{ext}}}{\tau}$ avec $\tau = 10 \text{ min}$.

- C1.** Caractériser l'équation (linéarité, ordre, coefficients, second membre) et la mettre sous forme canonique.
- C2.** Prévoir la température finale et esquisser $T(t)$ avant tout calcul.
- C3.** Résoudre, puis déterminer l'instant où le café atteint 50°C . Commenter : que représente cette durée par rapport à τ ?
- C4.** Que se passerait-il si le café était sorti d'un réfrigérateur à 5°C ? Répondre d'abord sans calcul.

D. Analyse d'erreur

Un étudiant résout $\tau \dot{i} + i = c$ avec $i(0) = -c$ et rédige :

« Solution homogène : $i_h = \lambda e^{-t/\tau}$. Or $i_h(0) = -c$, donc $\lambda = -c$. Solution particulière : $i_p = c$.
Donc $i(t) = c - c e^{-t/\tau}$. »

- D1.** Sans refaire le calcul, montrer que ce résultat est faux (tester par exemple pour une valeur particulière de t).
- D2.** Identifier l'erreur de méthode et corriger.



Exercice 3 : condition initiale

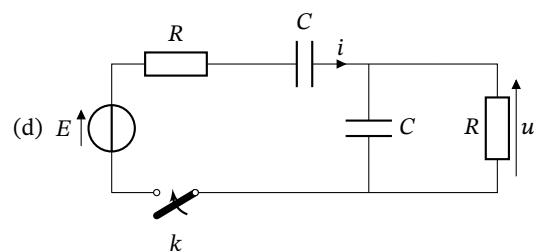
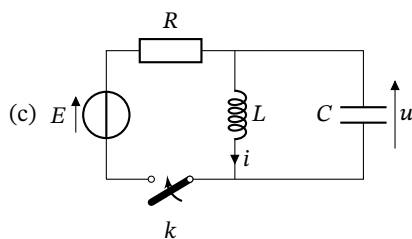
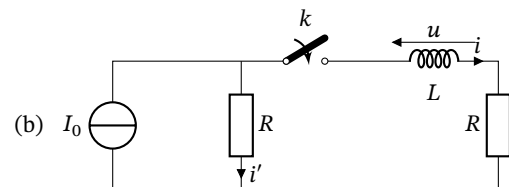
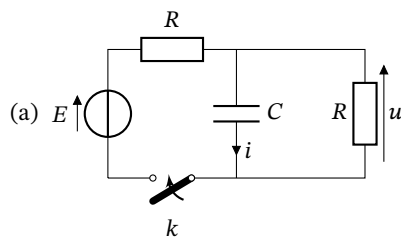
Savoir-faire

- ⚙️ utiliser les données et la continuité pour en déduire les conditions initiales ;
- ⚙️ utiliser des schémas équivalents pour déterminer des grandeurs en régime permanent.

Difficulté : ● ○ ○

Dans chacun des circuits ci-dessous, l'interrupteur k est ouvert depuis longtemps et on le ferme à l'instant $t = 0$. On suppose qu'à $t = 0^-$ tous les condensateurs sont déchargés et qu'aucune bobine n'est parcourue par un courant.

- 1 Rappel quelle grandeur électrique est nécessairement continue pour un condensateur, puis pour une bobine.
- 2 Par quel dipôle simple peut-on remplacer un condensateur en régime permanent continu ? une bobine ?
- 3 Pour chaque circuit, dessiner le schéma équivalent à $t = 0^+$, puis en régime permanent ($t \rightarrow \infty$). En déduire les grandeurs u , i et i' lorsqu'elles sont présentes. Présenter les résultats dans un tableau à trois colonnes : $t = 0^-$, $t = 0^+$, $t \rightarrow \infty$.
- 4 Parmi les grandeurs du tableau, lesquelles sont discontinues en $t = 0$? Est-ce en contradiction avec la question 1 ?



Exercice 4 : constante de temps

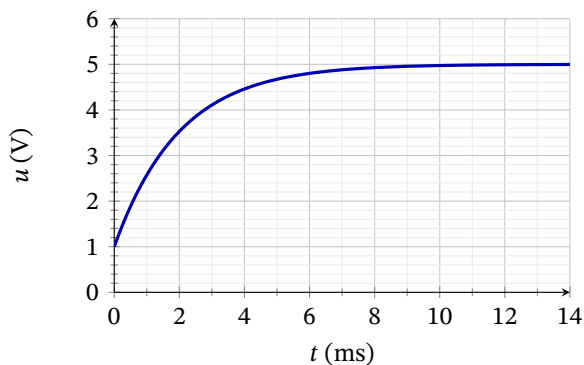
Savoir-faire

- ⚙️ interpréter un graphe ;
- ⚙️ interpréter le rôle de la constante de temps τ ;

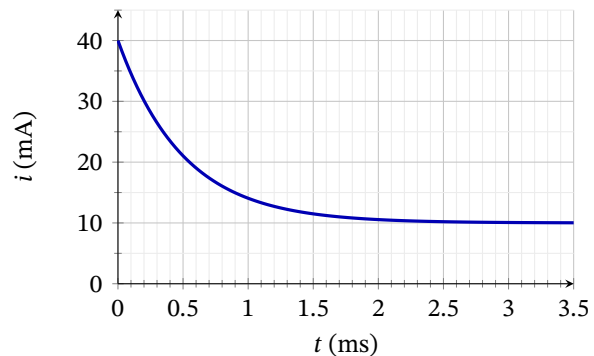
Difficulté : ● ○ ○



Les deux graphes ci-dessous représentent la réponse de deux circuits du premier ordre après une commutation à $t = 0$.



Signal 1



Signal 2

- 1 Relever, pour chaque signal, la valeur initiale et la valeur en régime permanent.
- 2 Déterminer la constante de temps τ par la méthode de la tangente à l'origine.
- 3 Vérifier ce résultat par une seconde méthode, en calculant la valeur prise par le signal à l'instant $t = \tau$. Quel pourcentage de la variation totale a alors été parcouru?
- 4 Au bout de combien de temps (en multiple de τ) peut-on considérer le régime permanent atteint à 1 % près?

Exercice 5 : vrai ou faux

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis *justifier* en une ou deux phrases (relation courant-tension, exemple ou contre-exemple).

- 1 Le courant qui traverse un condensateur est une fonction continue du temps.
- 2 En régime permanent continu, une bobine idéale se comporte comme un interrupteur ouvert.
- 3 Pour un circuit comportant un seul condensateur, la constante de temps vaut toujours RC , où R est la résistance branchée à côté du condensateur.
- 4 Au bout d'une durée τ , le régime permanent est atteint.
- 5 Dans un circuit RC série, plus la résistance est grande, plus le condensateur se charge vite.
- 6 La tension aux bornes d'une bobine peut être discontinue.

Exercice 6 : étude d'un circuit RC

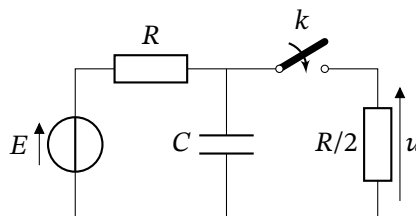


Savoir-faire

- ⚙ interpréter un graphique du 1er ordre;
- ⚙ déterminer une équation différentielle;
- ⚙ déterminer les conditions initiales;
- ⚙ résoudre une équation différentielle
- ⚙ confronter théorie et graphique.

Difficulté : ● ● ○

On étudie le circuit de la figure ci-dessous. L'interrupteur k est ouvert depuis longtemps; on le ferme à l'instant $t = 0$.

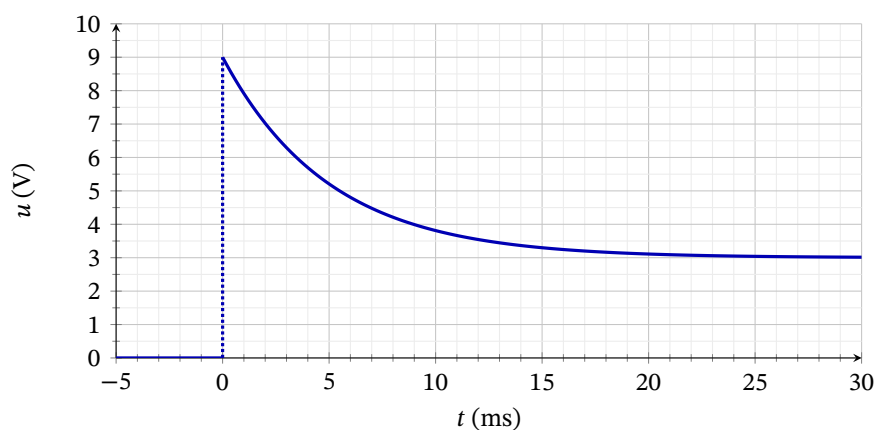


- 1 Le condensateur est-il chargé avant la fermeture de k ? Déterminer $u(t = 0^-)$ puis $u(t = 0^+)$.
- 2 En utilisant les équivalents en régime permanent, déterminer $U_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$.
- 3 Sans calcul supplémentaire, esquisser l'allure attendue de $u(t)$.
- 4 Montrer que, pour $t > 0$, la tension u vérifie l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau}$$

où l'on exprimera τ en fonction de R et C .

- 5 Résoudre cette équation et exprimer $u(t)$.
- 6 Interprétation : « éteindre » la source (la remplacer par un fil) et calculer la résistance équivalente R_{eq} vue par le condensateur. Comparer $R_{\text{eq}}C$ et τ .
- 7 On donne $R = 10 \text{ k}\Omega$. À l'aide du graphique de la figure ci-après, déterminer E et la capacité C du condensateur.





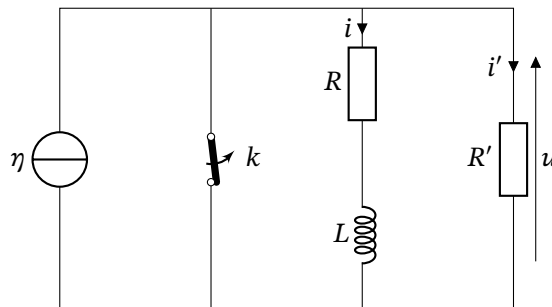
Exercice 7 : réponse à un échelon de courant

Savoir-faire

- ⚙ interpréter un graphique du 1er ordre ;
- ⚙ déterminer une équation différentielle ;
- ⚙ déterminer les conditions initiales ;
- ⚙ résoudre une équation différentielle
- ⚙ confronter théorie et graphique.

Difficulté : ● ● ○

On étudie le circuit de la figure ci-dessous. L'interrupteur k est fermé depuis longtemps : il court-circuite la source idéale de courant. À l'instant $t = 0$, on l'ouvre : le reste du circuit reçoit alors brusquement le courant η . La tension u et le courant i' sont orientés en convention récepteur.



- 1 Pourquoi ne pourrait-on pas modéliser la mise sous tension en plaçant un interrupteur ouvert *en série* avec la source idéale de courant ?
- 2 Déterminer les courants i et i' ainsi que la tension u juste après l'ouverture de l'interrupteur k .
- 3 Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$. Identifier la constante de temps τ .
- 4 Déterminer l'évolution du courant $i(t)$. Vérifier la valeur finale à l'aide du schéma équivalent en régime permanent.
- 5 En déduire $i'(t)$ ainsi que $u(t)$.
- 6 Tracer les courbes $i(t)$ et $u(t)$ en faisant apparaître valeurs initiales, asymptotes et τ . Commenter.

Exercice 8 : résistance apparente

Savoir-faire

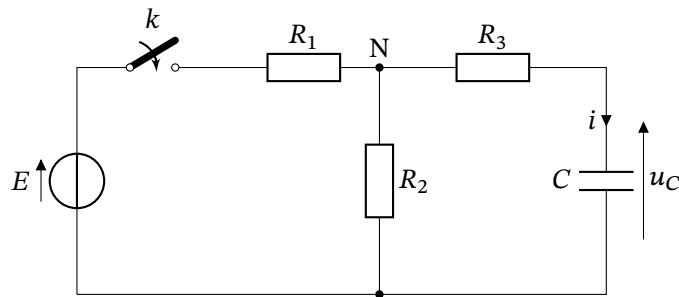
- ⚙ interpréter un graphique du 1er ordre ;
- ⚙ déterminer une équation différentielle ;
- ⚙ déterminer les conditions initiales ;
- ⚙ résoudre une équation différentielle
- ⚙ confronter théorie et graphique.

Difficulté : ● ● ○



Dans le circuit ci-dessous, le condensateur est initialement déchargé ; on ferme k à $t = 0$.

On donne $E = 10 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \mu\text{F}$.



- 1 Déterminer $u_C(0^+)$, $i(0^+)$ et $u_C(\infty)$ à l'aide des schémas équivalents.
- 2 Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C .
- 3 En déduire τ et vérifier que $\tau = R_{\text{eq}}C$, où R_{eq} est la résistance vue par le condensateur lorsque la source est éteinte.
- 4 Faire l'application numérique et donner $u_C(t)$.
- 5 La constante de temps dépend-elle de E ? Expliquer physiquement.

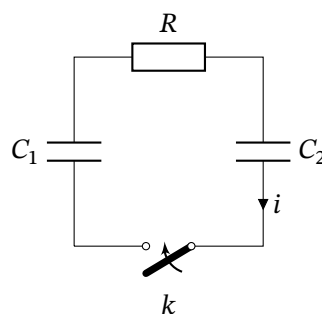
Exercice 9 : décharge d'un condensateur dans un autre condensateur

Savoir-faire

- ⚙ interpréter un graphique du 1er ordre ;
- ⚙ déterminer une équation différentielle ;
- ⚙ déterminer les conditions initiales ;
- ⚙ résoudre une équation différentielle
- ⚙ confronter théorie et graphique.

Difficulté : ● ● ○

On considère le circuit de la figure ci-dessous. Le condensateur de capacité C_1 porte la charge $q_0 > 0$ sur l'armature du haut ; celui de capacité C_2 est déchargé. À l'instant initial, on ferme l'interrupteur.





2026-2027

- 1 Déterminer $i(0^+)$.
- 2 Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ pour $t \geq 0$. Interpréter la constante de temps obtenue.
- 3 Déterminer la solution de cette équation différentielle.
- 4 Quelles sont les charges des deux condensateurs au bout d'un temps très long? Commenter en termes de conservation de la charge.

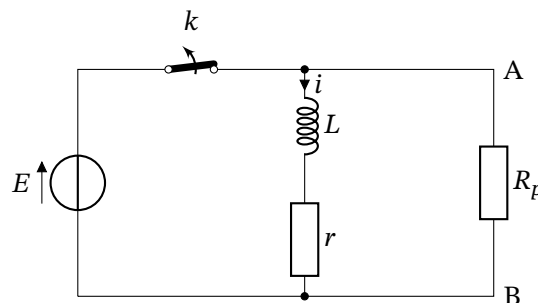
Exercice 10 : surtension

Savoir-faire

- ⚙ déterminer une équation différentielle;
- ⚙ déterminer les conditions initiales;
- ⚙ résoudre une équation différentielle
- ⚙ aspect énergétique des circuits du premier ordre (chapitre E4)

Difficulté : ● ● ●

La bobine d'un relais est modélisée par une inductance $L = 0,20 \text{ H}$ en série avec une résistance $r = 4,0 \Omega$. Elle est alimentée sous $E = 12 \text{ V}$ par l'interrupteur k , fermé depuis longtemps. Une résistance R_p est placée en parallèle sur la bobine. À $t = 0$, on ouvre k . On note $u = V_A - V_B$.



Savoir

Énergie emmagasinée dans une bobine : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} Li(t)^2$

Puissance dissipée par effet *Joule* au travers d'une résistance : $\mathcal{E}_R = Ri(t)^2$

Relation puissance énergie : $d\mathcal{E} = P(t)dt$ où $\mathcal{E} = \int_0^{t_f} P(t)dt$

- 1 Déterminer $i(0^-)$ et $u(0^-)$.
- 2 Déterminer $i(0^+)$ et $u(0^+)$. Application numérique pour $R_p = 1,0 \text{ k}\Omega$. Commenter.
- 3 Établir l'équation différentielle vérifiée par i pour $t > 0$ et en déduire $i(t)$ et $u(t)$. Calculer τ .
- 4 Quelle énergie est dissipée après l'ouverture? Dans quel dipôle principalement?
- 5 On remplace R_p par une résistance de protection $R_d = 10 \Omega$. Calculer la nouvelle valeur de $u(0^+)$ et la nouvelle constante de temps. Quel compromis apparaît?





- 6 (Culture technique) En pratique, on place une diode « de roue libre » en parallèle sur la bobine. Expliquer qualitativement son rôle.

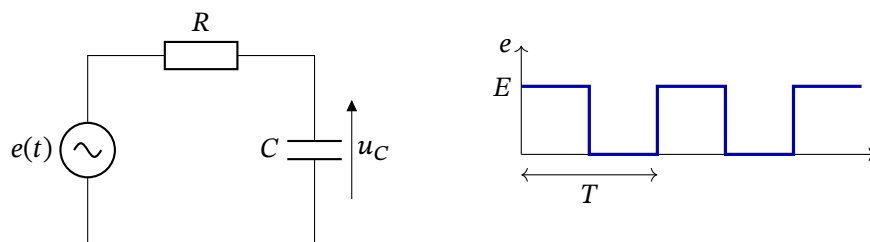
Exercice 11 : réponse à un créneau

Savoir-faire

- ⚙️ déterminer une équation différentielle par morceau ;
- ⚙️ déterminer les conditions initiales ;
- ⚙️ résoudre une équation différentielle par morceau et raccorder les solutions ;

Difficulté : ● ● ●

Un GBF délivre une tension créneau $e(t)$ de période T , valant E pendant une demi-période et 0 pendant l'autre, aux bornes d'un circuit RC série. On observe $u_C(t)$ à l'oscilloscope. On donne $R = 1,0 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$, $E = 5,0 \text{ V}$.



- 1 Calculer τ . Sans calcul, prévoir l'allure de $u_C(t)$ lorsque $T/2 = 10\tau$, puis lorsque $T/2 = \tau/10$. Justifier.
- 2 Cas $T/2 \gg \tau$: tracer $u_C(t)$ sur deux périodes. Quelle fréquence maximale doit-on choisir au GBF pour observer une charge complète à 1 % près ?
- 3 Cas $T/2 \ll \tau$: en régime établi, u_C oscille entre deux valeurs voisines. Autour de quelle valeur ? En assimilant les portions d'exponentielle à des segments de droite, montrer que l'amplitude crête à crête vaut $\Delta u \approx \frac{ET}{4\tau}$. Application numérique pour $f = 50 \text{ kHz}$.
- 4 (Pour aller plus loin) En notant U_1 et U_2 les valeurs minimale et maximale de u_C en régime établi et $a = T/(2\tau)$, montrer que $U_2 = \frac{E}{1 + e^{-a}}$ et retrouver le résultat précédent.

Éléments de réponse

3. Utiliser les lois de continuités.