



E2 | Électrocinétique

Circuits du premier ordre



Prérequis

Notions à maîtriser avant ce chapitre :

- ☐ utiliser les lois des réseaux;
- ☐ loi de comportement des principaux composants;
- ☐ schémas équivalents en régime permanent d'une bobine et d'un condensateur;
- ☐ théorèmes de continuité pour la bobine et le condensateur;
- ☐ dérivée des fonctions usuelles;
- ☐ équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants et second membre constant;

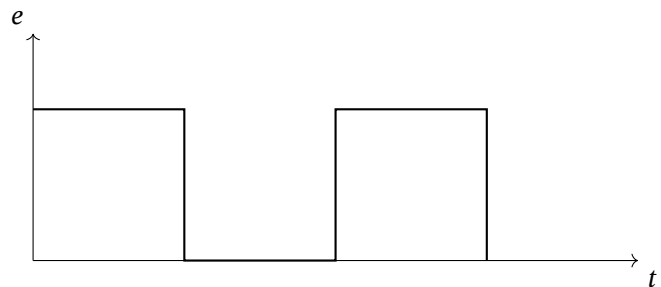
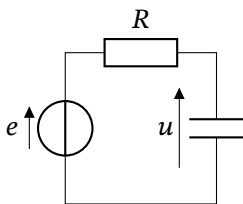


QR vers le TD

I Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension

I.A Étude expérimentale

Manipulation



Quelles observations sont faites ?

Correction

- Le condensateur se "charge" jusqu'à la tension du générateur E ;
- Le condensateur se "décharge" lorsque le générateur est éteint;
- La charge et la décharge durent le même temps;



I.B Définitions

Savoir

Vocabulaire à maîtriser :

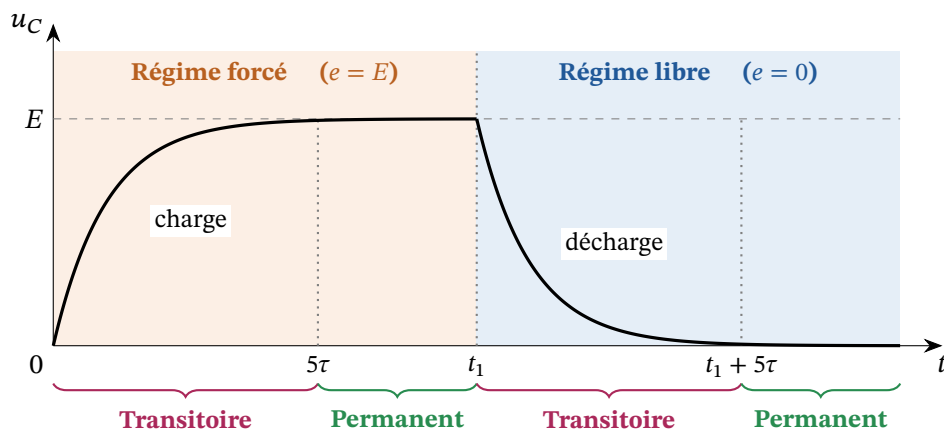
- un échelon de tension, fonction de *Heaviside*. $u(t) = U_0 H(t - t^*)$;
- Régime permanent (ou établi) : la réponse ne dépend plus des conditions initiales ;
- Régime transitoire : évolution du système d'un état vers un autre état ;
- Régime stationnaire (ou continu) : la réponse ne varie plus dans le temps ;
- Régime variable : les grandeurs dépendent du temps ;
- Régime libre : réponse d'un système sans source ;
- Régime forcé : réponse d'un système soumis à une source (non nulle) ;

Remarque : si tu t'y perds avec tout ce vocabulaire, il faut savoir répondre à trois questions :

- est-ce que la grandeur étudiée dépend du temps ? Oui → variable, Non → stationnaire (ou continu) ;
- y a-t-il une source ? Oui → régime forcé, Non → régime libre ;
- est-ce que l'état du système dépend encore des conditions initiales ? Oui → transitoire, Non → permanent

Remarque : les grandeurs écrites en majuscule sont, en général, continue. Exemple E pour un générateur signifie qu'il est constant, alors que e signifie qu'il est variable.

Attention à la confusion fréquence : permanent $\neq$ stationnaire.





II Rappels sur les équations différentielles d'ordre 1

Correction

À faire avant la suite :

- Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?
- Comment reconnaître une équation différentielle linéaire ?
- Quelle est la forme des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ?

Savoir

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une *fonction* $y(t)$ et qui relie y à certaines de ses dérivées. La **résoudre**, c'est trouver *toutes* les fonctions qui la vérifient pour tout t .

Savoir-faire

- Identifier une équation différentielle ;
- donner son ordre (ordre de la dérivée la plus élevée) ;
- identifier le second membre (terme qui ne dépend pas de y) ;
- identifier si les coefficients sont constants ;
- mettre l'équation sous forme canonique et identifier τ et y_∞ ;
- déterminer la constante d'intégration à partir de la condition initiale ;
- vérifier une solution en la réinjectant dans l'équation.

Savoir

Forme canonique (ordre 1, linéaire, coefficients constants, second membre constant) :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau} y(t) = \frac{y_\infty}{\tau} \quad \text{version explicite} \quad \text{soit} \quad \dot{y} + \frac{y}{\tau} = \frac{y_\infty}{\tau} \quad \text{version compacte}$$

où $\tau > 0$ est la **constante de temps** (en s) et y_∞ la **valeur finale**.

Méthode de résolution :

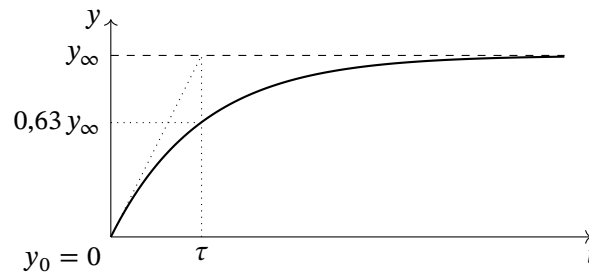
1. Solution homogène (second membre nul) : $y_H(t) = A e^{-t/\tau}$, $A \in \mathbb{R}$ une constante d'intégration.
2. Solution particulière (même forme que le second membre, ici constante) : $y_P = y_\infty$.
3. Solution générale : $y(t) = y_H(t) + y_P = A e^{-t/\tau} + y_\infty$.
4. Condition initiale $y(0) = y_0$, appliquée à la solution *générale* : $A = y_0 - y_\infty$.

$$y(t) = y_\infty + (y_0 - y_\infty) e^{-t/\tau}$$

Attention : la condition initiale s'applique à $y_H + y_P$, jamais à y_H seule.

Lien avec le cours de maths : $\dot{y} + ay = b$ correspond à $a = 1/\tau$ et $b/a = y_\infty$ (si $a \neq 0$).

Représentation



- 💡 La tangente à l'origine coupe la droite $y = y_\infty$ en $t = \tau$;
- 💡 En $t = \tau$, la valeur atteinte est la valeur finale moins 0,37 de $y_\infty - y_0$. (Plus facile à tracer avec des 1/3).

🔗 Exercice d'application 1

- 1 Déterminer, pour chaque équation différentielle, son ordre, si elle linéaire ou non, si ses coefficients sont constants ou non.
- 2 Pour les équations d'ordre 1 linéaires à coefficients, donner la forme canonique, puis la solution.

$$\tau \dot{u}_C + u_C = E$$

$$\dot{y} + t y = 0$$

$$\dot{y} + y^2 = 1$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$L \dot{i} + R i = 0$$

📄 Corrigé

- 1 Classification des équations différentielles.

Équation	Ordre	Linéaire	Coefficients
$\tau \dot{u}_C + u_C = E$	1	oui	constants
$\dot{y} + t y = 0$	1	oui	non constants
$\dot{y} + y^2 = 1$	1	non	constants
$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$	2	oui	constants
$L \dot{i} + R i = 0$	1	oui	constants

- 2 Forme canonique et solution des équations d'ordre 1 (A, K : constantes fixées par les conditions initiales).

— $\tau \dot{u}_C + u_C = E$: forme canonique

$$\dot{u}_C + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau},$$

solution $u_C(t) = E + A e^{-t/\tau}$ (solution particulière constante E + solution de l'équation homogène).



— $Li + Ri = 0$: forme canonique

$$\dot{i} + \frac{1}{\tau} i = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R},$$

solution $i(t) = A e^{-t/\tau}$.

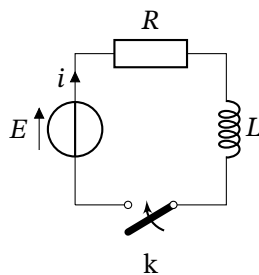
III Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension

Méthode

1. Flécher toutes les tensions et tous les courants (préciser la convention récepteur / générateur); repérer la grandeur cherchée et les grandeurs connues;
2. écrire les lois de comportement, les lois des mailles et des nœuds, jusqu'à avoir autant d'équations que d'inconnues;
3. partir de la loi de comportement contenant la grandeur cherchée, puis éliminer les autres grandeurs pour ne garder que la grandeur cherchée et ses dérivées;
4. (si nécessaire) dériver toute l'équation. Ne **jamais** intégrer / primitiver : une constante inconnue apparaîtrait;
5. mettre l'équation sous forme canonique et identifier la constante de temps τ ;
6. vérifier : homogénéité, signes des coefficients, valeur en régime permanent.

Exemple du circuit RC.

Exercice d'application 2



À l'instant initial $t = 0$, l'interrupteur est fermé. Le générateur de tension idéal fournit une tension E continue.

- 1 Déterminer l'équation différentielle sur le courant i ;
- 2 Résoudre l'équation différentielle;
- 3 Tracer la solution.

Corrigé

1

1. Conventions. Pour $t > 0$, l'interrupteur est fermé. On oriente i comme sur le schéma et on flèche u_R et u_L en convention récepteur (le générateur est en convention générateur). Grandeur cherchée : i .



2. Lois. Inconnues : i, u_R, u_L (3 inconnues, donc 3 équations).

$$u_R = R i \quad (\text{loi d'Ohm})$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad (\text{loi de comportement de la bobine})$$

$$E = u_R + u_L \quad (\text{loi des mailles})$$

3. Élimination. On remplace u_R et u_L dans la loi des mailles pour ne garder que i et ses dérivées :

$$E = R i + L \frac{di}{dt}$$

4. Dérivation. Inutile ici : l'équation ne contient aucune intégrale.

5. Forme canonique. On divise par R pour avoir un coefficient 1 devant i :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{1}{\tau} \frac{E}{R}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (\text{constante de temps du circuit RL}).$$

6. Vérifications.

- Homogénéité : τ est un temps, donc $\tau \frac{di}{dt}$ s'exprime en ampères, comme i et E/R .
- Signes : les coefficients τ et 1 sont de même signe, donc la solution ne diverge pas (circuit passif).
- Régime permanent : la bobine se comporte comme un fil, donc $i_\infty = E/R$. L'équation avec $\frac{di}{dt} = 0$ redonne bien $i = E/R$.

2 Solution homogène :

$$i_h(t) = A e^{-t/\tau}$$

Solution particulière (second membre constant, donc on la cherche constante) :

$$i_p = \frac{E}{R}$$

Solution générale :

$$i(t) = \frac{E}{R} + A e^{-t/\tau}$$

Condition initiale : pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, donc $i(0^-) = 0$. Le courant dans une bobine est continu, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

$$0 = \frac{E}{R} + A \implies A = -\frac{E}{R}$$

Solution complète :

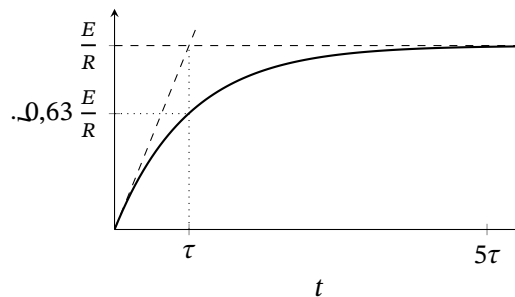
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})}$$

3 Points à placer :

- $i(0) = 0$;
- i est croissante et tend vers E/R quand $t \rightarrow +\infty$;
- la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$;



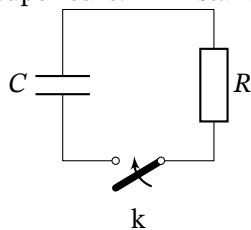
- $i(\tau) \approx 0,63 E/R$;
- régime permanent atteint à 1 % près pour $t \approx 5\tau$.



IV Réponse d'un circuit RC en régime libre

Exercice d'application 3

Nous étudions la décharge d'un condensateur initialement chargé dans un circuit RC : $Q(t=0) = Q_0 > 0$ sur l'armature supérieure. À l'instant initial $t = 0$, nous fermons l'interrupteur.



- 1 Écrire l'équation différentielle sur la charge Q du condensateur;
- 2 Résoudre l'équation différentielle;
- 3 Tracer la solution.

Corrigé

1

1. Conventions. Pour $t > 0$, l'interrupteur est fermé. On note Q la charge de l'armature supérieure du condensateur. On oriente i de sorte qu'il *entre* dans cette armature (sens trigonométrique sur le schéma). On flèche u_C et u_R en convention récepteur. Grandeur cherchée : Q .

2. Lois. Inconnues : Q, i, u_C, u_R (4 inconnues, donc 4 équations).

$$Q = C u_C \quad (\text{loi de comportement du condensateur})$$

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{définition de l'intensité})$$

$$u_R = R i \quad (\text{loi d'Ohm})$$

$$u_C + u_R = 0 \quad (\text{loi des mailles})$$



3. Élimination. On exprime u_C et u_R en fonction de Q et de ses dérivées :

$$u_C = \frac{Q}{C} \quad \text{et} \quad u_R = R \frac{dQ}{dt},$$

puis on les injecte dans la loi des mailles :

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

4. Dérivation. Inutile ici : l'équation ne contient aucune intégrale.

5. Forme canonique. On multiplie par C pour avoir un coefficient 1 devant Q :

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = 0} \quad \text{avec} \quad \tau = RC \quad (\text{constante de temps du circuit RC}).$$

6. Vérifications.

- Homogénéité : $[RC] = s$, donc τ est bien un temps.
- Signes : les coefficients τ et 1 sont de même signe, donc la solution ne diverge pas (circuit passif).
- Régime permanent : le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, donc $i_\infty = 0$, puis $u_{R,\infty} = 0$, puis $u_{C,\infty} = 0$ et $Q_\infty = 0$. L'équation avec $\frac{dQ}{dt} = 0$ redonne bien $Q = 0$.

2 Solution homogène :

$$Q_h(t) = A e^{-t/\tau}$$

Solution particulière (second membre nul) :

$$Q_p = 0$$

Solution générale :

$$Q(t) = A e^{-t/\tau}$$

Condition initiale : $Q(0^-) = Q_0$. La charge (donc la tension) d'un condensateur est continue, donc $Q(0^+) = Q(0^-) = Q_0$.

$$Q_0 = A$$

Solution complète :

$$\boxed{Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}}$$

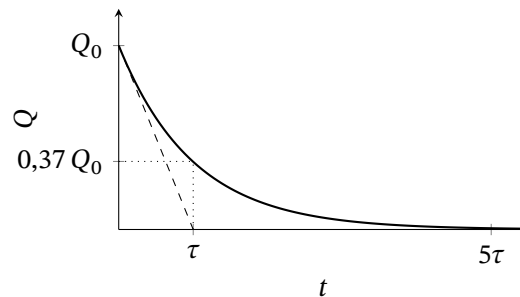
Remarque. On en déduit $i(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau} < 0$: le courant circule en réalité dans le sens opposé à celui choisi, c'est-à-dire qu'il *sort* de l'armature chargée, ce qui est cohérent avec une décharge. Le courant est *discontinu* en $t = 0$ (0 puis $-Q_0/\tau$) : seules la charge et la tension du condensateur sont continues.

3 Points à placer :

- $Q(0) = Q_0$;
- Q est décroissante et tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$;
- la tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = \tau$;



- $Q(\tau) \approx 0,37 Q_0$;
- décharge terminée à 1 % près pour $t \approx 5\tau$.



Auto-évaluation

- 1 Que peut-on dire du courant et de la tension en présence d'une bobine ou d'un condensateur?
- 2 Quelle est la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants?
- 3 Définir les régimes suivants (à l'aide d'un graphique) : continu, permanent, stationnaire, variable, libre, forcé.
- 4 Comment déterminer l'équation différentielle sur une grandeur dans un circuit électrique?
- 5 Pour un circuit RC série. Faire un schéma. Déterminer l'équation différentielle puis la solution pour une condition initiale u_0 et un forçage E . Tracer la solution.